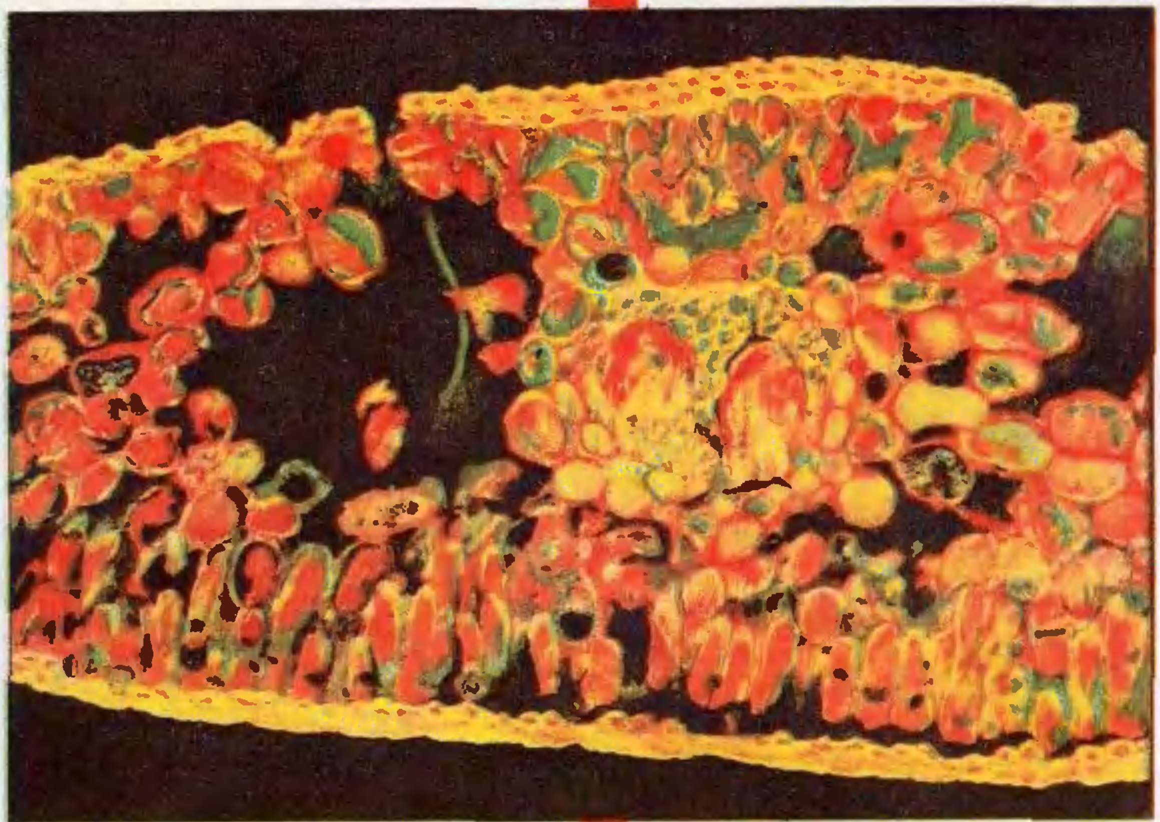
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Зеленая трава

1989


UN SOUPER ANIMÉ CHEZ MAXIM'S
CRÉATION DES
7 PEREZOFF

kvant.mccme.ru

Квант

7 1989

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Москва, «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

«РАДИ ОТЕЧЕСТВА, НАУК И СЛАВЫ»

Доктор физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

В самом центре Латинского квартала в Париже, по соседству с Пантеоном, Сорбонной и музеем Людовика Великого расположена небольшая тихая улица Декарта. Дом под номером 5 на этой улице известен во всем мире — более полутора веков в нем находилась знаменитая Политехническая школа. История ее восходит к 1794 году — самому героическому и трагическому периоду Великой французской революции. Революционный переворот затронул все сферы жизни французского общества. Пожалуй, впервые в истории политические и общественные деятели стали по-настоящему осознавать роль науки, ее влияние на политику, промышленность и торговлю. Революционные войны и острое соперничество с Англией заставили правительство заняться проблемой централизованной подготовки научных кадров, необходимых для того, чтобы быстро и грамотно решать сложные государственные проблемы. В руководящих органах революционного государства находилось немало известных ученых. Крупнейший геометр Гаспар Монж занимал пост морского министра, талантливый математик и механик Лазар Карно был одним из создателей вооруженных сил республики и военной промышленности. Они-то и явились инициаторами создания высшего учебного заведения нового типа, прославившего Францию.

В старой Франции высшее образование было в основном сосредоточено в 22 университетах — устаревших учреждениях, задавленных грузом средневековых традиций и схоластики. Особенно в плачевном состоянии находились математические и физико-химические науки. Исключение составляли лишь несколько привилегированных военно-инженерных школ (Школа мостов и дорог, Мезьерская школа военных инженеров, Школа учеников артиллерии), в которых, по существу, и была сосредоточена подготовка специалистов в точных науках. Наиболее известной среди них являлась Мезьерская школа, в которой многие годы преподавал Г. Монж и выпускником которой был Л. Карно.

В первые годы революции были закрыты многие высшие учебные заведения и средние специальные школы. В конце 1793 года высший орган революционной власти — Национальный конвент — начал реорганизацию системы образования в стране. Декретом от 29 фримера II года Республики (19 декабря 1793 года) в стране вводилось бесплатное и обязательное для всех начальное образование.

Примерно в то же время Гаспар Монж делает доклад в Комитете общественного спасения с предложением о создании нового высшего учебного заведения, готовящего специалистов по математике и точным наукам. В противоположность идеалу всестороннего гармонического развития личности, который мерещился XVIII столетию, предполагалось, что создаваемое учебное заведение должно быть специализированным, ориентированным на достижение возможно быстрых результатов в математике, точном естествознании и технических науках. Все меры воздействия на честолюбие, окрыляемое перспективой блестящей жизненной будущности, должны быть привлечены для того, чтобы заставить учащихся работать с максимальным напряжением всех сил. Комитет полностью поддержал Монжа и поручил ему, а также Ламбларди, Фуркруа, Карно и Приеру разработку ее проекта.

21 вантоза II года Республики (11 марта 1794 года) Конвент принял решение об основании нового высшего учебного заведения — Центральной школы общественных работ, назначение которой формулировалось следующим образом: «Воспитывать различных инженеров. Восстановить обучение точным наукам, которое было прервано во время кризисов революции, и давать высокое научное образование молодым людям или для того, чтобы быть употребленными правительством в работах республики, или для того, чтобы приносить в свои родные места просвещение и там расточать действительно полезные знания». В положении о создании школы предусматривались приемные экзамены в 22 городах Франции для отбора 400 лиц мужского пола в возрасте от 16 до 20 лет, которые «доказали преданность республиканским принципам и проявили хорошие знания по арифметике и началам алгебры и геометрии». Трудное внутреннее положение страны не позволило строго выдержать требования, предъявляемые к возрасту поступающих, поэтому самому молодому из них оказалось всего 12 лет, а некоторым из поступивших далеко перевалило за двадцать. Первым директором школы стал бывший руководитель Школы мостов и дорог член Комитета общественного спасения Ламбларди, но вскоре его сменил Монж, остававшийся на этом посту многие годы. Первоначально школа разместилась в Бурбонском дворце. Занятия начались 21 декабря 1794 года.

Школа общественных работ была рассчитана на три года обучения. В ней преподавались анализ, геометрия, начертательная геометрия, черчение, механика, физика, химия, архитектура и фортификация. Преподавали эти предметы крупнейшие французские ученые — Лагранж, Монж, Лаплас, Бертолле, Лепелетье, Неве. Уже из первого набора школы вышли такие выдающиеся ученые, как астроном и физик Био, механик Пуансо, физик Малюс, открывший поляризацию света, археолог Де Шези, расшифровавший клинописные тексты ассирийцев.

Монж отдает школе все свое время и средства. Он создает курс начертательной геометрии — основы многих технических дисциплин. «Никто не преподавал так хорошо, как он,— вспоминал впоследствии ученик Монжа известный инженер Бриссон.— Жесты, поза, модуляция голоса — все служило ему для развития мыслей. Он всегда следил за глазами слушателей и знал, как угадать степень понимания каждого из них. Мы узнали Монжа, этого добрейшего человека, привязанного к юношеству и преданного наукам. Он всегда был среди нас; после лекций по геометрии, анализу и физике начинались частные беседы, которые еще больше расширяли и укрепляли наши способности. Он был другом каждого воспитанника, побуждал нас к труду и всегда радовался нашим успехам».

Завершился первый учебный год. 1 сентября 1795 года школе присвоили название Политехнической и четко определили ее задачу. Школа становилась двухгодичной. В соответствии со своим названием она должна была выпускать не готовых инженеров, а учащихся, подготовленных для последующей двухгодичной специализации в гражданских и военных высших учебных заведениях более узкого профиля — Школе мостов и дорог, Горном институте, Школе военных инженеров и т. д. Выбор этих учебных заведений не был свободным для оканчивающих Политехническую школу, а определялся качеством диплома. Выпускнику с лучшим дипломом открывался доступ во все учебные заведения, и чем хуже диплом, тем ограниченней оказывался выбор. Кроме выпускников Политехнической школы, в этих специальных учебных заведениях могли обучаться в течение четырех лет и учащиеся со стороны. Однако они не имели такого положения, как питомцы Политехнической школы, которые рассматривались как государственные служащие и получали определенное содержание.

Была утверждена новая программа приемных экзаменов в Политехническую школу. Абитуриенты экзаменовались по арифметике, алгебре, которая включала в себя решение уравнений первых четырех степеней и теорию рядов, и геометрии.

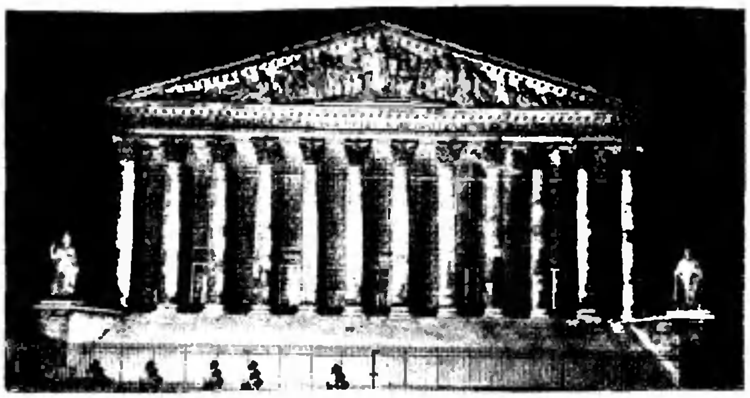
Чтобы продемонстрировать уровень требований, предъявляемых к абитуриентам, приведем несколько задач по геометрии, которые предлагались в первые годы существования школы.

1. Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

2. Разделим каждую сторону треугольника на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон, и соединим точки деления с противоположными вершинами. Доказать, что полученные таким образом прямые пересекаются в одной точке, которая является центром тяжести треугольника, образованного ее проекциями на стороны данного треугольника.

Л. Карно (1753—1823).

Г. Монж (1746—1818).



Фасад Бурбонского дворца.

3. Даны угол AOB и точка P. Найти на стороне OA такую точку M, чтобы две окружности C и C', касательные к OB и проходящие через точки M и P, пересекались под данным углом.

4. Построить треугольник по углу, периметру и площади.

5. Пусть a, b, c, d — стороны данного четырехугольника, взятые в последовательном порядке. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около четырехугольников, один из которых образован биссектрисами внутренних углов, а другой — биссектрисами внешних углов данного четырехугольника, относятся как $\frac{a+c-b-d}{a+c+b+d}$.

Преподавание в Политехнической школе осуществляли профессора, читающие лекции, репетиторы, объясняющие лекции и ведущие практические занятия, и, наконец, экзаменаторы, проверяющие знания с помощью очень строгих подробных экзаменов, которым подвергался каждый из обучаемых. Преподавание велось по хорошо разработанному учебному плану. В первые десятилетия существования школы математические дисциплины стояли в этом плане на первом месте и занимали около 20 часов в неделю. В число этих дисциплин входили анализ, геометрия (синтетическая и аналитическая), механика, начертательная геометрия и черчение. На втором году обучения большое место отводилось экспериментальной физике и химии.

В законодательном порядке была принята обязательная публикация всех лекций, читаемых в Политехнической школе. Лекционные курсы литографировались, и каждый учащийся получал отпечатки, которые распространялись далеко за пределы школы. Влияние этих лекций было настолько велико, что бо́льшая часть учебников по математике начала XIX века была написана во Франции именно на их основе. Руководство школы всеми силами стремилось разжечь любознательность своих питомцев, стимулировать их научное творчество. Ревностно претворялся в жизнь девиз Политехнической школы: «Ради отечества, наук и славы».

18 брюмера VIII года Республики (9 ноября 1799 года) тридцатилетний командующий войсками Парижского военного округа генерал Наполеон Бонапарт совершил государственный переворот и стал первым консулом Республики. Талантливый полководец, Наполеон был, кроме того, членом Института Франции*) по секции механики; он интересовался математикой, занимался астрономией, написал статью по баллистике. Ему было важно заручиться поддержкой ученых и воспитанников-политехников. Вскоре после прихода к власти он дает звания сенаторов трем профессорам школы — Монжу, Бертолле и Лапласу. Был учрежден новый устав школы, сохранившийся в ней более чем на полвека — до 1852 года.

В мае 1804 года сенат провозгласил Наполеона «божьей милостью и установлениями Республики императором французов». Франция стала империей. Наполеон реорганизовал Политехническую школу, подчинив ее военному министерству. И до 1804 года положение политехников немногим отличалось от положения курсантов военных училищ. Основанная в самые тяжелые годы революции, школа фактически жила по военному распорядку. Теперь же, декретом от 16 июля 1804 года, школа официально становилась военной. Из учащихся сформировали батальон, состоящий из пяти рот. Командовал школой генерал. Во время учебы политехники числились на военной службе и размещались в интернате на казарменном положении. Им платили жалованье сержантов артиллерии. Школа была переведена из Бурбонского дворца на улицу Декарта в реконструированные помещения двух старинных учебных заведений: Наваррского коллежа и коллежа Де Бонкур.

Непрерывные войны, которые вела Франция, поглощали учителей и учащихся и сделали обычным явлением пониженные экзаменационные требования, ускоренные курсы и т. п. Прекрасно осознавая уникальность нового учебного заведения, Наполеон освободил школу от непосильных военных поборов, заявив, что не следует убивать курицу, несущую золотые яйца. Политехническая школа вновь получила возможность роста и развития.

Докладывая в 1794 году Национальному конвенту проект закона о Политехнической школе, член Комитета общественного спасения Фуркруа заявил: «Я не колеблясь считаю, что новая школа в скором времени составит славу Франции». Его слова оказались пророческими. Политехническая школа развилась в один из важнейших факторов научного прогресса XIX столетия. Престиж ее был столь велик, что каждый из политехников, какого бы высокого положения в обществе он ни достигал, до конца своей жизни после указания своей фамилии писал: «Бывший учащийся Политехнической школы». Школа создала научную и техническую элиту, организованную не по сословным признакам, а по личным способностям и таланту. Невозможно перечислить всех выдающихся деятелей науки, техники, военачальников, которых она воспитала. Среди ее выпускников — прославленные французские математики Коши, Эрмит, Жордан и Пуанкаре, физики Араго и Френель, вся династия Беккерелей, астроном Леверье, химик Гей-Люссак, философы Конт и Сорель, маршалы Жоффр и Фош. И по сей день не меркнет слава этого уникального учебного заведения. Ныне она готовит высшие технические кадры страны. Подавляющее большинство современных ведущих инженеров и промышленников, многие государственные деятели были питомцами школы, рожденной Великой французской революцией.

*) Основанный в 1795 году Институт Франции объединяет пять академий: Французскую Академию, Академию письменности и литературы, Академию нравственных и политических наук, Академию наук и Академию художеств. Секция механики относится к Академии наук.

ЗЕЛЕНАЯ, ЗЕЛЕНАЯ ТРАВА...

Кандидат биологических наук
И. Э. ЛАЛАЯНЦ,
кандидат биологических наук
Л. С. МИЛОВАНОВА

Так поется в популярной песне известной рок-группы. И вряд ли при этом кто-нибудь задумывается: а почему, действительно, трава зеленая? А если задать этот вопрос?

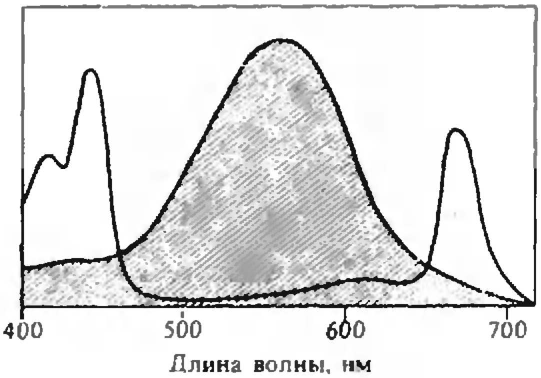
Стандартный ответ можно предугадать: трава зеленая потому, что в ней содержится хлорофилл. А почему он зеленый? Известно, что в процессе фотосинтеза хлорофилл поглощает световую энергию и превращает ее в энергию химическую — энергию связей органических веществ. При этом поглощает он избирательно — в синей области спектра (длина волны около 450 нм) и в оранжевой (примерно 670 нм). А зеленые, желтые и красные лучи пропускает, практически не поглощая. На зеленую область спектра солнечного света приходится максимум энергии. И глаз наиболее чувствителен к зеленому свету... Вот, пожалуй, и ответ. Но из него возникает «чисто практический» вопрос: как же так получилось, что эволюция лишила высшие растения большого «куска» энергии? Почему центральная, наиболее энергоемкая, часть солнечного спектра используется так неэффективно? Для того чтобы разобраться в этом вопросе, необходимо заглянуть в глубь веков — на три-три с половиной миллиарда лет назад.

До этого времени жизненная энергия черпалась из накопленных природой органических источников. Но эти запасы были небесконечны, и наступило время, когда для дальнейшего развития жизни стали необходимы новые источники энергии. Единственный такой источник для биосферы — Солнце. Но чтобы воспользоваться этой энергией, необходимы были, прежде всего, светоулавливающие устройства. И природа создала их в виде молекул так называемого бактериородопсина.

Бактериородопсин (БР) представляет собой белок, соединенный с ретиналем — молекулой, «реагирующей» на свет: она может поднимать и опускать хвост. Когда света нет — хвост «опущен», когда же на молекулу ретиналя падает квант света (фотон) — хвост «поднимается» и запускает каскад реакций в мембране бактериальной клетки.

Мембрана представляет собой двойной слой жирных молекул. Это оболочка клетки, отгораживающая ее от внешней среды. Жизнь тем и отличается от неживой природы, что может отгородиться от своего окружения. Но не насовсем, не абсолютно. Она «общается» с внешней средой через мембрану — ведь клетка должна питаться, получать энергию, выбрасывать наружу «отходы» своей жизнедеятельности и т. д. Делается это все с помощью мембранных белков-«переносчиков», одним из которых и является БР. Бактериородопсин был открыт у солелюбивых бактерий, или галобактерий (от греческого «галос» — соль), живущих в «рассолах» с концентрацией соли до 20 %.

С самого начала клетки нуждались в активном удалении из них ионов



Спектры поглощения бактериородопсина и хлорофилла (черная кривая).

водорода — протонов (p^+), которые постоянно рождаются в процессе обмена веществ. Но снаружи концентрация протонов была примерно в сто раз выше, и для выталкивания их из клетки необходима была энергия. Вот эту-то энергию и начал улавливать БР. При поглощении фотона солнечного света хвост ретиналя выпрямляется и «выбивает» протон из клетки. Но поскольку «свято место не пустует», вместо p^+ в клетку поступает молекула питательного вещества. Молекулу БР можно сравнить с качелями, на одном конце которых «сидит» протон, а на другом — питательная молекула. Работают эти молекулярные качели за счет энергии солнца.

Но резкое уменьшение внутриклеточной концентрации p^+ привело к тому, что, по законам диффузии, наружные протоны еще активнее устремились внутрь клетки. И это стремление клетка приспособила себе на пользу: энергия проходящих сквозь мембрану протонов стала использоваться для образования АТФ.

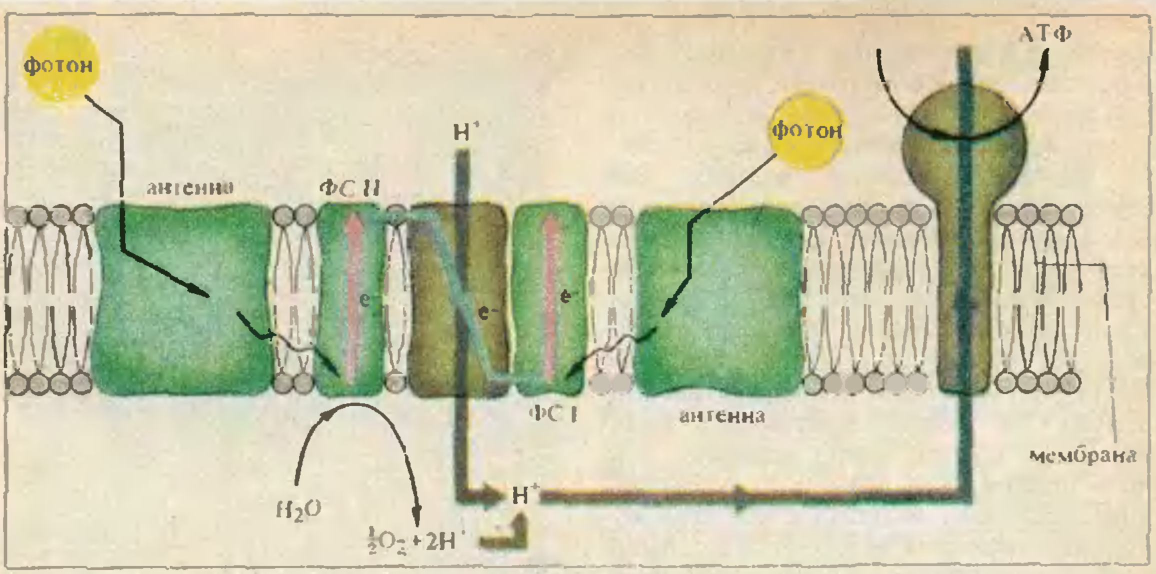
АТФ расшифровывается довольно «просто»: АденозинТриФосфорная кислота. Это — «ее энергетическое высочество» клетки, аккумулятор внутриклеточной энергии. Все процессы жизнедеятельности в живой природе идут за счет энергии АТФ. При распаде молекулы АТФ выделяется огромная (по масштабам клетки) энергия, которая идет на различные нужды клетки. Таким образом, галобактерии, эти живые «ископаемые» на Земле, которые возникли порядка трех-четырех миллиардов лет назад, сумели успешно «запрячь» фотон в энергетическую колесницу.

Однако расцвет микроорганизмов, содержащих в своей мембране БР, предопределил и их «закат» — они сошли со сцены эволюции. Ведь для того, чтобы построить новую клетку, необходим углерод — все в нашем живом мире состоит из цепочек атомов этого элемента. Но галобактерии «выедали» все органические соединения, состоящие из цепочек углерода. В качестве остававшегося неиспользованным был только углекислый газ

Поперечный срез зеленого листа (снимок сделан с помощью электронного микроскопа). Хорошо видны поверхностные слои клеток, защищающие лист сверху и снизу. В середине листа — клетки, в которых находятся многочисленные хлоропласты (они видны как зернистая структура внутри срезанных клеток). В этих зеленых пластидах и происходит фотосинтез.

Фотография хлоропласта, полученная с помощью электронного микроскопа. Хлоропласты представляют собой чечевицеобразные зеленые зерна, построенные из мембран (тонкие полоски на снимке), в которых располагаются белковые комплексы, несущие хлорофилл (темные участки мембран). Именно в этих участках происходит фотосинтез.

CO_2, который постоянно выделялся из вулканов и накапливался в атмосфере. Но как усвоить, или, как говорят ученые, зафиксировать атмосферный CO_2? Ведь чтобы перевести его в органическую форму, нужно его химически восстановить. А для этого необходима энергия.



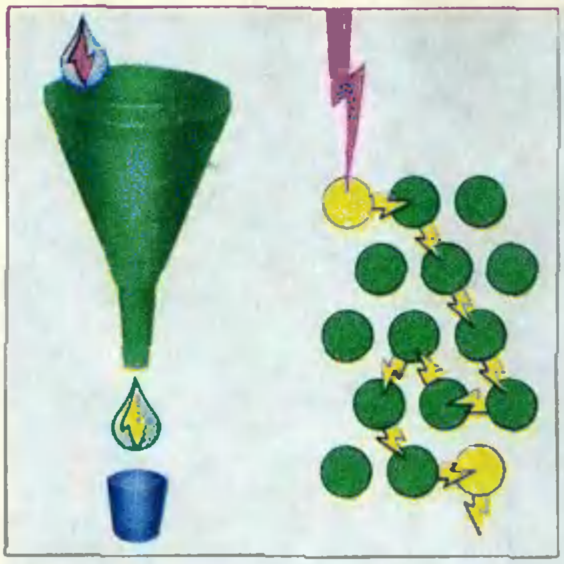
Мембрана, в которой располагаются фотосинтезирующие системы (ФС), представляет собой двойной слой молекул жирных кислот, обращенных «хвостами» друг к другу (тонкие двойные искривленные линии), с которыми соединены остатки фосфорной кислоты (темные кружочки сверху и снизу). Толщина мембраны 4—4,5 нм. Фотоны солнечного света, падающие на мембрану, улавливаются антеннами и направляются на хлорофилл реакционных центров фотосистем. За счет кинетической энергии выбитого из хлорофилла электрона ФСII расщепляет молекулу воды; при этом в атмосферу высвобождается кислород, а в хлоропласте остается ион водорода. ФСI «накачивает» водород извне, и оба потока протонов направляются на АТФ-азный комплекс, который синтезирует АТФ.

Галобактерии не стали решать задачу фиксации атмосферного CO_2 и «вышли из игры», законсервировавшись на миллиарды лет в одноклеточном состоянии. На сцену вышли новые участники эволюции — обладатели хлорофилла. Конструктивное решение, придуманное природой, было очень четким. Мы уже говорили, что все процессы в клетке идут за счет АТФ. Следовательно, для того, чтобы восстановить CO_2, нужна дополнительная АТФ. Значит, нужны дополнительные протоны. Протоны можно взять из воды — там их неограниченное количество. Надо только расщепить эту воду, для чего... нужна новая энергия.

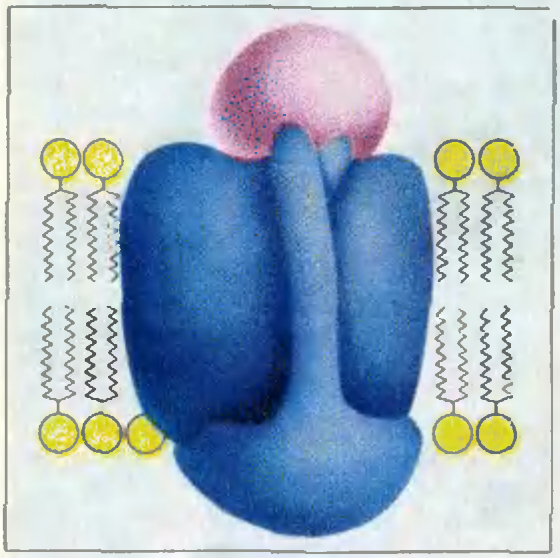
Но большую часть энергии Солнца уже улавливал БР галобактерий, и неиспользованными оставались только крайние области спектра солнечного света. Пустить эту энергию на нужды растительной клетки и призван был хлорофилл. Процесс синтеза органических веществ за счет световой энергии мы и называем фотосинтезом.

Для осуществления фотосинтеза природа сконструировала замечательное устройство. Улавливание фотонов происходит в гигантских комплексах, которые объединяют до 300—400 молекул хлорофилла. Эти светоулавливающие антенны находятся в мембране хлоропласта. Энергия уловленных отдельными молекулами фотонов передается на хлорофилл реакционного центра (РЦ). За счет этой энергии в РЦ из молекулы хлорофилла выбивается электрон, который улавливается системой молекул, способных передать его кинетическую энергию на фермент, расщепляющий воду. Освобождающийся кислород, который для растительной клетки является ядом, выделяется в атмосферу. А ионы водорода (p^+) поступают в АТФ-азный комплекс, синтезирующий дополнительную АТФ.

Систему, осуществляющую эту деятельность — от улавливания фотонов до высвобождения протонов из воды, называют фотосистемой II. Называют так потому, что есть еще фотосистема I, более «старая» в эволюционном отношении. Она была создана тогда, когда кислорода в атмосфере еще не было, и зеленые водоросли жили в во-



Светоулавливающая антенна — гигантский комплекс, объединяющий до 300—400 молекул хлорофилла,— действует подобно воронке: она собирает фотоны и передает их энергию на реакционный центр, который срабатывает при поступлении на него одного-единственного фотона.



Реакционный центр построен из трех белков (на рисунке они синие), цепи которых имеют разные веса и строения. Две более мелкие цепи как бы окружены большой, имеющей длинный «хоботок», поднимающийся с нижней поверхности мембраны к верхней (молекулы жирных кислот, образующих мембрану, представлены линиями в виде «пилы», а остатки фосфорной кислоты художник изобразил желтыми кружочками). Сверху РЦ расположена молекула белка цитохрома (розовый шарик).

де, ведя борьбу с пурпурными не на жизнь, а на смерть. Именно эта система обеспечивала АТФ-азу протонами до появления фотосистемы II.

Создание фотосистем является одним из достижений эволюции. Впервые атмосфера стала обогащаться кислородом. Появление в воздухе мощнейшего окислителя резко подстегнуло эффективность энергетических процессов во всем живом мире. Появилась возможность более активного творчества природы в деле создания сложных животных форм. Пурпурные, красные, багряные и бурые водоросли проиграли битву зеленым, обладающим хлорофиллом. Только зеленые растения смогли выйти на сушу.

Наш рассказ, надеемся, кажется простым и понятным. Однако мы лишь редкими штрихами обозначили сложнейшие физические и химические процессы, которые составляют фотосинтез. И многое еще неясно в этих процессах, ответы на многие вопросы еще только предстоит найти. Но успехи в исследовании фотосинтеза огромны. За работы в этой области уже присуждены две Нобелевские премии. На этой проблеме сконцентрировались усилия физиков и химиков, биологов и математиков. Лазеры и электронные микроскопы, мощные компьютеры и рентгеновские установки — все это использует наука для раскрытия тайн фотосинтеза.

Сегодня, конечно, еще далеко до практического применения знаний, полученных в ходе этих кропотливых и дорогостоящих работ. Но в перспективе видится возможность создания совершенно новых солнечных батарей, при конструировании которых будут использованы «принципы» построения фотосинтезирующих мембран. Такие источники энергии смогут производить ее экологически «чисто» и с большим КПД. Эта чистота, можно сказать «стерильность», фотосинтеза особенно привлекает нас, живущих в загазованном и постоянно «утепляющемся» мире...

Вот такой длинный рассказ вырос из, казалось бы, простого вопроса: почему трава зеленая?

ПОЧЕМУ НЕ ЛЕТАЮТ САМОЛЕТЫ В СИЛЬНЫЙ ДОЖДЬ?

Кандидат физико-математических наук
С. К. БЕТЯЕВ

«У природы нет плохой погоды»,— утверждается в популярной песне. Это положение очень часто опровергается Аэрофлотом, который задерживает рейсы, ссылаясь на плохие метеоусловия. В этом я убедился, когда всю осеннюю дождливую ночь вместе с приятелем прождал отправления нужного нам рейса в московском аэропорту Домодедово.

— Почему задерживают рейсы? — начал я мыслить вслух.— Время гроз уже миновало, обледенение крыла в теплую погоду невозможно, современное состояние навигационной техники позволяет проводить полеты в условиях полного отсутствия видимости, в сплошном тумане...

В динамике снова зашуршало «...вылет рейса... откладывается... метеоусловиям...». За окнами в сплошном дожде расплывались фонари...

— Ясно, почему запрещены полеты,— промолвил я после продолжительного молчания,— воздушный винт не рассчитан на работу в условиях повышенной влажности. Пропеллер самолета — это не гребной винт корабля.

— Наш самолет турбовинтовой,— поправил приятель,— небольшое присутствие воды в двигателе не оказывает сильного влияния на его КПД.

— Так в чем же дело? Выходит, метеоусловия — только предлог?!

— Не торопись с выводами. Давай нарисуем, как обтекается крыло самолета потоком, содержащим водяные капли.

Приятель отодвинул недопитый стакан с чаем, достал лист бумаги, авторучку с разноцветными стержнями и набросал рисунок 1.

— Мы будем рассматривать движение в системе отсчета, связанной с самолетом, в предположении, что уже находимся в полете. В этой системе крыло самолета неподвижно, а воздух и капли налетают на него. И скорости их вдали от крыла одинаковы и равны по абсолютной величине скорости полета самолета.

— А сила тяжести? — спросил я, глядя на рисунок.

— Ею можно пренебречь. На пути от взлетной полосы до высоты верхней границы дождевых облаков средняя

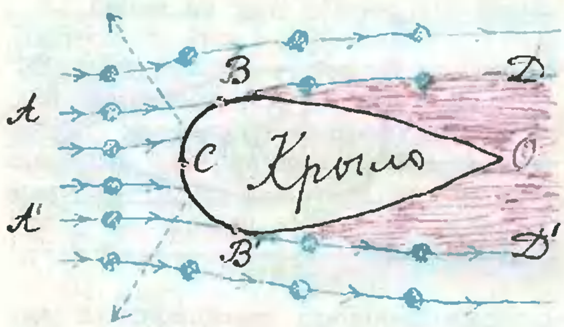


Рис. 1.

скорость современных пассажирских лайнеров равна 70 м/с. А скорость равномерного падения капли дождя — около 10 м/с. Так что пренебрежение mg оправдано.

— Как же капли дождя соударяются с крылом?

— Давай посмотрим. Среди траекторий капель найдутся две, которые касаются профиля крыла,— ABD и $A'B'D'$. Траектории, расположенные выше ABD и ниже $A'B'D'$, не пересекаются с крылом. Область, которая закрашена красным цветом, будет «сухой», капли дождя сюда не попадают. А вот участок BCB' непрерывно бомбардируется каплями. При ударе о крыло импульс капли меняется, значит, на нее действует сила со стороны крыла, и такая же по абсолютной величине сила действует на крыло со стороны капли. Нетрудно понять, что эта сила направлена в сторону, противоположную направлению скорости самолета. Так создается дополнительная сила сопротивления.

— Из-за нее и отменяются полеты в сильный дождь?

— Не торопись,— охладил меня приятель.— Давай оценим эту силу. У *метеорологов* можно узнать, что для Самого Сильного Дождя (как с уважением сказал бы Винни Пух) характерны капли диаметром $d \sim 2$ мм с *массовой концентрацией* $\varrho_к \sim 2$ г/м^3. Сначала примем для оценок, что капли совершенно не отклоняются от первоначальных траекторий, т. е.

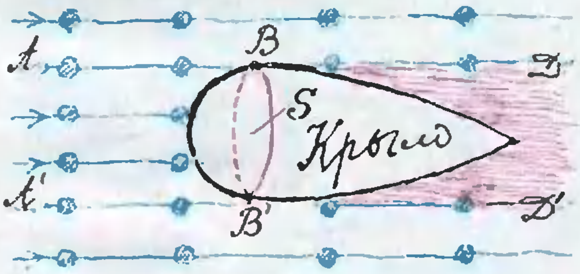


Рис. 2.

линии ABD и $A'B'D'$ остаются прямыми,— и он *изобразил рисунок 2*.— Тогда о крыло в единицу времени будет ударяться vSn капель. Здесь S — наибольшая площадь сечения крыла, перпендикулярного скорости, т. е. площадь сечения BB', $n = \varrho_к/m$ — число капель в единице объема. Каждая капля массой m при неупругом ударе о крыло (если она полностью потеряет скорость) принесет импульс $\sim mv$; значит, все капли в единицу времени сообщат крылу импульс $\sim vSnmv$. Но этот секундный импульс и есть сила. И действует эта сила в направлении, противоположном направлению движения самолета. Таким образом, к *аэродинамической силе*, т. е. к силе сопротивления, действующей со стороны воздуха, надо бы добавить еще силу лобового сопротивления F от ударов капель, которая *порядка* $\varrho_к Sv^2$. Такое же выражение мы получим и для силы лобового сопротивления чистого воздуха; только, конечно, надо $\varrho_к$ заменить на плотность *воздуха* ϱ_1: $F_1 \sim \varrho_1 Sv^2$. При нормальных условиях $\varrho_1 \approx 1300$ г/м^3. Так что отношение силы лобового сопротивления крыла от капель к аэродинамической силе сопротивления будет величиной порядка $F/F_1 \sim \varrho_к/\varrho_1 \sim 10^{-3}$.

Все, что можно сказать на основе таких оценок по порядку величины,— это то, что вклад капель в общее лобовое сопротивление будет составлять малую величину. Тем более, что в окрестности кромки крыла траектории капель все-таки будут искривляться, и о крыло ударится только часть капель, налетающих «из бесконечности» внутри полосы с поперечным сечением S, как это и было показано на рисунке 1.

— Так в чем же дело? Выходит, дождь полету не помеха? — вернул я разговор в русло Аэрофлота.

— Опять спешишь. Сила от ударов *капель о крыло* не мешает. Но есть еще сила совсем другой природы — сила поверхностного трения, направленная по касательной к поверхности крыла. *С этой касательной силой* стоит разобраться подробнее. Ведь ясно, что в дождь крыло станет «мокрым». Это значит, что при сильном дожде крыло *омывается уже* не воздухом, а водой. Крыло движется в совершенно иных условиях, и, возможно, сила сопротивления изменится значительно.

Он нарисовал крыло, покрытое водяной пленкой,— рисунок 3.

— *Но ведь у любой машины*,— сказал я,— в том числе и у самолета, имеется дополнительный «запас» тяги. Именно на такой случай.

— *Разумеется. И это подсказывает*, что необходимы количественные оценки. А для этого нужны дополнительные предположения. Естественно предположить, что внутри пленки скорость движения жидкости не одинакова: у поверхности крыла она равна нулю — здесь жидкость «прилипает» к телу, и по мере удаления от поверхности скорость возрастает. Это связано с наличием сил вязкости в движущейся жидкости: на каждый тонкий слой жидкости со стороны нижнего соседнего слоя, более близкого к крылу, действует сила вязкости, направленная против потока, а со стороны верхнего слоя — сила, направленная по потоку. Если вязкость жидкости мала, то скорость, равная нулю на поверхности крыла, уже на небольшом расстоянии от него выходит на постоянное значение v_0. Иными словами, силы вязкости сказываются в тонком пограничном слое, прилегающем к поверхности крыла. Мы будем предполагать, что именно эта ситуация реализуется в нашем случае.

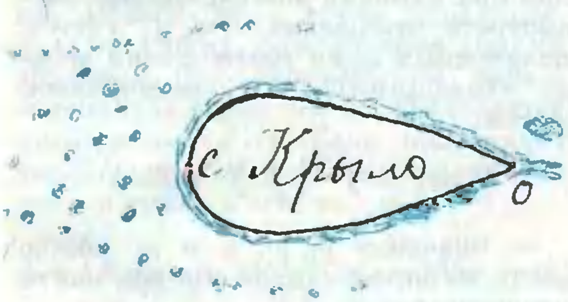


Рис. 3.

И приятель изобразил сказанное на рисунке 4.

Тут я услышал: диктор объявляет о начале регистрации пассажиров на наш рейс. Мы так увлеклись, что не заметили — дождь почти прошел. Все вокруг задвигались, засуетились. В суматохе было не до разговоров. Но когда мы уселись в кресла, я сказал:

— Давай все-таки разберемся с дождем. Ты остановился на пограничном слое.

— Можно считать, что именно пограничный слой «передает» действие набегающего потока крылу, создавая

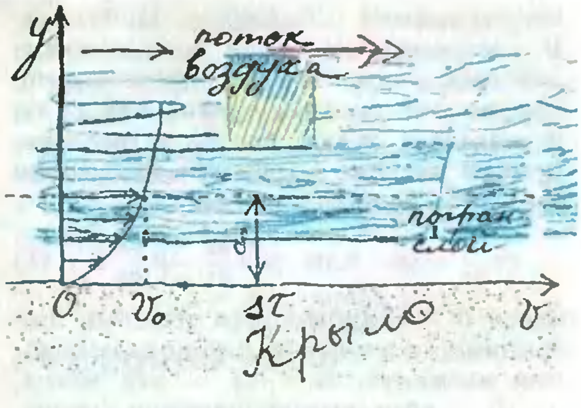


Рис. 4.

дополнительное сопротивление. И это сопротивление мы сейчас оценим. Нас будет интересовать сила, действующая со стороны жидкости по касательной к поверхности крыла. Отнесенную к единичной площадке, эту силу называют напряжением трения.

— От скорости она не зависит,— начал я рассуждать.— Ведь в соответствии с условием прилипания скорость при $y=0$ равна нулю. От чего же зависит?

— Ответ на этот вопрос дал Исаак Ньютон в своей знаменитой книге «Математические начала натуральной философии»: напряжение трения τ определяется производной от скорости $v(y)$ по нормали к поверхности y, т. е. dv/dy. И эта зависимость — прямо пропорциональная:

$$\tau=\mu\frac{dv}{dy},$$

где коэффициент пропорциональности μ называется динамическим коэффициентом вязкости. Закон Ньютона оказался «жизнеспособным» в широком диапазоне изменяемых величин. Подчиняющиеся ему среды называются ньютоновыми. К ним относятся и те среды, которые нас интересуют: воздух и вода.

— *Допустим, что это так.* Но мы всего лишь заменили одну неизвестную τ другой неизвестной dv/dy, ни на шаг не продвинувшись вперед.

— Конечно. Закон Ньютона дает только физическое представление о напряжении трения. Следующий шаг *в определении действующих на крыло* сил сделал основатель теории пограничного слоя выдающийся немецкий гидродинамик Людвиг Прандтль. В пограничном слое существенно действие сил трения. Естественно предположить, что именно эти силы и тормозят жидкость. Для выделенного на рисунке 4 элемента это можно выразить соотношением

$$m\frac{dv}{dt}\sim\tau s,\quad \text{или}\quad \rho\delta s\frac{dv}{dt}\sim\mu\frac{dv}{dy}s. \qquad (1)$$

Здесь δ — характерная толщина пограничного слоя, s — площадь основания элемента, $m=\rho\delta s$ — его масса, dv/dt — абсолютное значение ускорения.

— Пока мы только добавили неизвестных: теперь это еще и dv/dt....

—... и толщина пограничного слоя δ, которую тоже нельзя считать конкретной величиной. Но оценку для нее мы сейчас получим вместе с Прандтлем. Поскольку соотношение (1) приближенное, означающее равенство порядков величин, производные можно заменить отношением соответствующих характеристик. Так, вместо dv/dy можно написать v_0/δ. Равенство $dv/dy=v_0/\delta$ будет точным только в том случае, когда профиль скорости в пограничном слое линейный: $v=v_0y/\delta$. В противном случае это равенство приближенное, как и само соотношение (1). Оценим теперь dv/dt. Характерная длина, на которой существует пограничный слой, равна хорде профиля крыла l_0 (это CO на рисунке 1 — расстояние между крайними точками профиля). Следовательно, можно положить $dv/dt\sim v_0^2/l_0$. Сократив обе части соотношения (1) на s и подставив значения производных dv/dy и dv/dt, получим:

$$\frac{\rho\delta v_0^2}{l_0}\sim\mu\frac{v_0}{\delta}.$$

Отсюда находим

$$\delta\sim\left(\frac{\mu l_0}{\rho v_0}\right)^{1/2},\quad \text{или}\quad \delta\sim l_0\,\mathrm{Re}^{-1/2}, \qquad (2)$$

где отношение $\mathrm{Re}=\rho v_0 l_0/\mu$ называется числом Рейнольдса — в честь английского гидродинамика Осборна Рейнольдса, впервые установившего влияние этого безразмерного числа на тип течения. Жидкость считается слабовязкой, если Re велико, и наоборот, жидкость считается сильновязкой, если Re мало. Пограничный слой, как мы уже говорили, образуется только в слабовязкой жидкости. В авиации число Re достигает значений 10^5-10^6.

— Ну хорошо, с δ вопрос прояснился. Но нас-то интересует τ,— сказал я.— Ведь τ определяет, «потянет» или «не потянет» двигатель в дождь.

— Используя (2), нетрудно вычислить напряжение трения на дне пограничного слоя:

$$\tau\sim\frac{\mu v_0}{\delta}\sim\frac{\mu v_0}{l_0}\mathrm{Re}^{1/2}.$$

Такое же соотношение справедливо для течения воздуха, когда дождя нет. Соответствующим «воздушным» величинам присвоим нижний индекс «1»:

$$\tau_1\sim\frac{\mu_1 v_{01}}{l_0}\mathrm{Re}_1^{1/2},$$

где $\mathrm{Re}_1=\rho_1 v_{01}l_0/\mu_1$. Чтобы узнать, во сколько раз увеличивается сила трения при наличии дождя, следует рассмотреть отношение τ/τ_1. С учетом полученных нами соотношений между входящими в τ, τ_1 величинами, имеем:

$$\frac{\tau}{\tau_1}=\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{1/2}\left(\frac{v_0}{v_{01}}\right)^{3/2}.$$

— Значения ρ, ρ_1, μ и μ_1 можно взять из справочников. Но как найти отношения v_0/v_{01}?

— С помощью уравнения Бернулли. Это уравнение дает связь между скоростью частиц в потоке жидкости или газа и давлением. В нашем случае, когда поток, обтекающий крыло, практически не искривляется и движется в горизонтальной плоскости, уравнение Бернулли выглядит так:

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=\mathrm{const}.$$

Получить это соотношение нетрудно. Предположим, что в направлении течения давление в потоке изменяется по закону $p(x)=kx+\mathrm{const}$,— и приятель нарисовал график $p(x)$ такой, как на рисунке 5.— Выделим в потоке жидкости (или воздуха) вне пограничного слоя малый паралле-

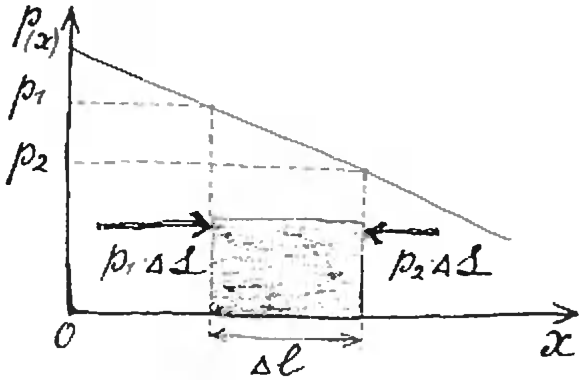


Рис. 5.

лепипед длиной Δl с площадью основания боковых граней Δs. На левую грань параллелепипеда действует сила $p_1 \cdot \Delta s$, на правую — $p_2 \cdot \Delta s$. Суммарная сила, действующая на параллелепипед, равна

$$F = p_1 \cdot \Delta s - p_2 \cdot \Delta s = (p_1 - p_2)\Delta s.$$

Так как $p_2 = p_1 + \frac{dp}{dx}\Delta l$, то

$$F = -\frac{dp}{dx}\Delta l \cdot \Delta s = -\frac{dp}{dx}\Delta V,$$

где $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta s$ — объем параллелепипеда. Работа, совершаемая силами давления при перемещении параллелепипеда вдоль оси x, определяется интегралом $\int F\,dx$. Если происходит перемещение из точки с координатой $x=a$ в точку $x=b$, то

$$A = \int_a^b F\,dx = -\Delta V \int_a^b \frac{dp}{dx}\,dx = \Delta V(p_a - p_b).$$

Эта работа равна изменению кинетической энергии параллелепипеда, т. е. $A = K_b - K_a$ (мы пренебрегаем работой сил трения):

$$\Delta V(p_a - p_b) = \Delta V \cdot \rho\left(\frac{v_b^2}{2} - \frac{v_a^2}{2}\right).$$

Отсюда и получаем

$$p_a + \rho\frac{v_a^2}{2} = p_b + \rho\frac{v_b^2}{2},$$

т. е.

$$p + \rho\frac{v^2}{2} = \text{const}.$$

— Хорошо,— сказал я,— с уравнением Бернулли разобрались. Но как все-таки определить отношение v_0/v_{01}?

— Я же сказал — с помощью этого уравнения. Оно справедливо и для потока жидкости, и для воздушного потока. Будем, как и раньше, величины, относящиеся к воздуху, записывать с индексом «1». Итак, в водяной пленке, образующейся на поверхности крыла,

$$p + \rho\frac{v^2}{2} = \text{const},$$

а в воздушном потоке

$$p_1 + \rho_1\frac{v_1^2}{2} = \text{const}_1.$$

Чтобы сравнить v и v_1, надо установить какие-то соотношения между const и const$_1$, p и p_1.

Помнишь, сравнивая силы лобового сопротивления при полете в сухую погоду и в дождь, мы пришли к выводу, что они практически не отличаются. Значит, давление p_C в точке C (посмотри на рисунок 1) можно считать одинаковым в обоих случаях. А скорости частиц жидкости и воздуха в этой точке равны нулю. Учитывая все это, мы можем записать: для потока жидкости, обтекающего крыло,

$$p + \rho\frac{v^2}{2} = p_C,$$

для потока воздуха

$$p_1 + \rho_1\frac{v_1^2}{2} = p_C,$$

и, следовательно,

$$p + \rho\frac{v^2}{2} = p_1 + \rho_1\frac{v_1^2}{2}.$$

Теперь разберемся с p и p_1. Выделенный нами параллелепипед перемещается с потоком практически по горизонтали, и в поперечном направлении (т. е. в направлении вертикали) скорость его равна нулю. Значит, силы, действующие на него сверху и снизу, заведомо одинаковы. Но сила, действующая сверху,— это в обоих случаях (и при наличии водяной пленки, и без нее) сила давления со стороны «внешнего» потока воздуха.

(Окончание см. на с. 42)

Заказы принимаются

Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» (Физматлит) является крупнейшей издательской организацией, выпускающей литературу по физико-математическим наукам — математике, механике, физике, астрономии, кибернетике и информатике.

На все издания Главной редакции физико-математической литературы, включенные в аннотированный тематический план выпуска на 1990 год, гарантируется полное выполнение заказов книготорговых организаций.

Ниже приведен список книг, которые могут заинтересовать наших читателей. Нумерация соответствует тематическому плану. Цена — ориентировочная.

Заказать эти книги можно в ближайшем (крупном) книжном магазине или в магазине, имеющем отдел «Книга — почтой», в ближайшие 1—2 месяца. Там же можно познакомиться с аннотированным тематическим планом.

Математика

18. Колмогоров А. Н. *Математика в ее историческом развитии:* Сборник статей. 1 р. 10 к.

29. Пуанкаре А. *О науке:* Пер. с фр. 3 р. 20 к.

32. Стройк Д. Я. *Краткий очерк истории математики:* Пер. с нем.— 5-е изд. 1 р. 30 к.

39. Арнольд В. И. *Теория катастроф.*— 3-е изд., перераб. и доп. 50 к.

40. Литлвуд Дж. *Математическая смесь:* Пер. с англ.— 5-е изд. 40 к.

41. Петросян Л. А., Рихсиев Б. Б. *Преследование на плоскости.* (Популярные лекции по математике). 20 к.

61. Лурье М. В., Александров Б. И. *Задачи на составление уравнений:* Учеб. руководство.— 3-е изд., перераб. 20 к.

62. Никольский С. М., Потапов М. К. *Алгебра:* Пособие для самообразования.— 2-е изд., перераб. и доп. 1 р.

Физика

92. Дирак П. А. *Воспоминания о необычайной эпохе.* Сборник статей. Пер. с англ. 1 р. 60 к.

115. Каганов М. И., Лифшиц И. М. *Квазичастицы: Идеи и принципы квантовой физики твердого тела.*— 2-е изд., испр. и доп. 30 к.

116. Маковецкий П. В. *Смотри в корень:* Сборник любопытных задач и вопросов.— 6-е изд. 85 к.

117. Паркер Б. *Мечта Эйнштейна: В поисках единой теории строения Вселенной:* Пер. с англ. 80 к.

118. Кошкин Н. И. *Элементарная физика:* Справочник. 60 к.

119. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике.*— 3-е изд., испр. 2 р. 30 к.

129. *Сборник задач по физике:* Учеб. пособие / Л. П. Баканина, В. Е. Белонучкин, С. М. Козел, И. П. Мазанько.— 2-е изд., испр. 90 к.

Астрономия

132. Ван-дер-Варден Б. *Пробуждающаяся наука:* Пер. с англ. 5 р.

135. Докучаева О. Д. *Астрономическая фотография: Материалы и методы.* 4 р.

136. Климишин И. А. *Календарь и хронология.*— 3-е изд., перераб. и доп. 1 р. 60 к.

139. Зигель Ф. Ю. *Астрономия с биноклем.* 50 к.

140. Ламзин С. А., Сурдин В. Г. *Протозвезды.* 70 к.

141. Новиков И. Д. *Эволюция Вселенной.*— 3-е изд., перераб. и доп. 85 к.

142. Степанян Н. Н. *Наблюдаем Солнце.* 50 к.

143. Ходж П. *Галактики:* Пер. с англ. 50 к.

144. *Астрономический календарь на 1991 г.* 1 р. 20 к.

145. *Атлас планет земной группы и их спутников.* 6 р. 50 к.

146. Куликовский П. Г. *Справочник любителя астрономии.*— 5-е изд., перераб. 2 р. 70 к.

Информатика

108. Хирман Д. В. *Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике:* Пер. с англ. 1 р. 80 к.

152. Бронников В. А. *Искусственные ограничения естественного интеллекта.* 1 р.

153. Брусенцов Н. П. *Микрокомпьютерная система обучения «Наставник».* 70 к.

156. Зенкин А. А. *Интерактивная компьютерная графика.* 2 р.

157. Кауэлл У. *Зарубежные библиотеки и пакеты программ по вычислительной математике.* Пер. с англ. 4 р. 50 к.

162. Корягин Д. А., Горбунов-Посадов М. М., Мартынюк В. В. *Системное обеспечение пакетов прикладных программ.* 1 р.

165. Малпас Дж. *Реляционный язык Пролог и его применение:* Пер. с англ. 5 р.

174. Брудно А. Л., Каплан Л. И. *Московские городские олимпиады по программированию.*— 2-е изд., доп. 50 к.

175. Сенин Г. В. *Персональный компьютер для новичка.* 35 к.

176. Дьяконов В. П. *Форт-системы программирования персональных ЭВМ:* Справ. пособие. 1 р.

177. Пярнпуу А. А. *Программирование на алгоритмических языках:* Учеб. пособие для вузов.— 3-е изд., перераб. 90 к.

Библиотечка «Квант»

179. Белонучкин В. Е. *Кеплер, Ньютон и все, все, все...* 40 к.

180. Бронштейн М. П. *Солнечное вещество.* 2-е изд. 40 к.

181. Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. *Раз задача, два задача...* 50 к.

182. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. *Введение в теорию вероятностей.*— 2-е изд., перераб. и доп. 60 к.

183. Носов Ю. Р. *Молнии в кристаллах: Дебют оптоэлектроники.* 50 к.

184. Перельман Я. И. *Знаете ли вы физику?* 3-е изд. 50 к.

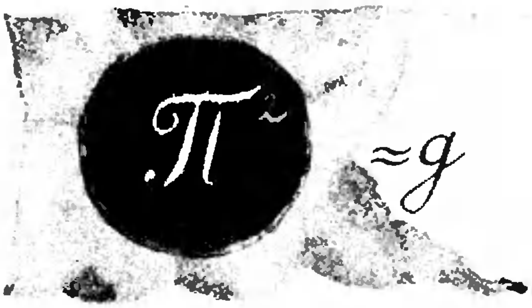
185. Филиппов А. Т. *Многоликий солитон.*—2-е изд., перераб. 70 к.

186. Филонович С. Р. *Судьба классического закона.* 50 к.

УДИВИТЕЛЬНОЕ РАВЕНСТВО

Б. Д. КОТЛЯР

Возможно, совпадение... Чему равно π — отношение длины окружности к ее диаметру? Читатель «Кванта» вправе обидеться на такой вопрос. Конечно же $\pi \approx 3{,}14$; можно и точнее: $\pi \approx 3{,}14159$; можно и еще точнее... Значит, $\pi^2 \approx 9{,}87$. А чему равно g — ускорение свободного падения? Кто же этого не знает — каждый, изучавший физику, скажет, что $g \approx 9{,}81$ м/с^2. Значит:



«Ну и что? — пожмет плечами читатель.— Мало ли на свете совпадений! Да и совпадение-то не настоящее: разница между π^2 и g не так уж мала — около 0,06.»

«Да тут вообще говорить не о чем,— вступит в разговор другой читатель,— само равенство $\pi^2 \approx g$ не имеет никакого смысла, потому что в левой части стоит число, а в правой — величина, имеющая размерность. Если измерять расстояние не в метрах, а, например, в сантиметрах, то $g \approx 981$ см/с^2. А в Англии и вовсе: $g \approx 32{,}2$ фут/с^2. Так что ничего общего между π^2 и g нет!»

И все-таки давайте попробуем разобраться, какова природа загадочного равенства $\pi^2 \approx g$. Для этого, как правильно заметил второй читатель, нужно разобраться, в каких единицах измеряются физические величины.

Чем измерять длину? С давних времен и до наших дней людям приходится производить измерения — определять длину, время, вес, скорость и другие величины. И издавна стоял вопрос о единицах измерения. Каждый знает, конечно, что в международной системе единиц (СИ) основными являются единицы длины — метр, массы — килограмм, времени — секунда. Единицы хорошие, мы к ним привыкли, без них не мыслим себе повседневной жизни. Приходя в магазин, мы просим отвесить *2 килограмма* крупы, выходя на дорожку стадиона, пробегаем *100 метров*, от звонка до звонка на уроке проходит 45 минут, или *2700 секунд*. Время нам отсчитывают часы, для определения массы нужны весы, расстояние измеряем линейкой с делениями или рулеткой. А если под рукой нет рулетки? Как измерить длину в этом случае? Хорошо было бы, если бы единица измерения всегда была под руками,— захотел и изготовил себе свой собственный «эталон». Так обстоит дело с измерением углов! Для откладывания угла величиной в 42° мы пользуемся транспортиром, но эталон углов «1 градус» не нужен. Если завтра на Земле исчезнут все угольники и транспортиры, мы легко сможем восстановить эту единицу, просто разделив полный угол на 360 равных частей. Желательно и для других величин иметь воспроизводимые единицы измерений. Когда стихийно возникали первые системы мер, эта воспроизводимость была заложена в них с самого начала,— единицы длины связывали, например, с размерами отдельных частей человеческого тела. Так возникли «сажень» — расстояние между концами вытянутых в стороны рук взрослого человека («сажень мерная» ≈ 176 см) и «локоть», название которого говорит само за себя,— он равен расстоянию от локтя до вытянутых пальцев руки. От английского слова «foot» — «ступня» — берет начало единица длины «фут», о которой мы уже упоминали (фут равен 30,48 см). «Дюйм» — ширина большого пальца у его основания. Список можно было бы и продолжить, но уже и так ясно — наши предки связали сравнительно небольшие единицы длины с размерами отдельных частей тела.

Так введенные единицы длины имели очевидные неудобства. Главное из них состояло в том, что локти-то у разных людей разные, ступни тоже не одинаковые, а единица измерения требуется одна! Поэтому возникла необходимость иметь эталон — стандартные фут или сажень,— с которым можно было бы сравнивать другие эталоны, не столь главные, как тот — основной и единственный. Однако такой эталон — вещь не слишком хорошая. Сама процедура последовательной сверки с эталоном достаточно трудоемка и сложна. Кроме того, эталон необходимо содержать при строго фиксированных условиях — определенной температуре, влажности и т. д. И при всем этом эталон постоянно немного меняется, стареет.

Вместе с тем единые единицы измерения физических величин (в первую очередь — времени, массы, длины) становились все более необходимыми для развивавшихся в XVI—XVII веках науки, промышленности, мореплавания, торговли. После открытия европейцами Америки и морского пу-

ти в Индию вокруг Африки важной задачей стало как можно более точное определение местоположения корабля на море. У некоторых ученых возникла замечательная идея — создать единицу длины без эталона! Найти такую единую для всех величину, которую можно воспроизвести в любом месте и в любое время с возможно меньшим количеством простых материалов и приборов! Сделать эту единицу общей для различных стран и народов! Одним из ученых, предложивших новую единицу длины, был великий нидерландский физик, механик и математик Христиан Гюйгенс.

Его предложение состояло вот в чем. Изготовим маятник, т. е. подвесим на нити небольшое тяжелое тело. Подберем длину нити l так, чтобы маятник совершал одно колебание ровно за 2 секунды. (Это значит, что если отвести тело от положения равновесия и отпустить, то через 1 секунду оно займет симметричное, а еще через секунду вернется в исходное положение.) Так вот, Гюйгенс предложил за единицу длины принять длину нити l.

Отступление о математическом маятнике и Христиане Гюйгенсе. Математический маятник — это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити. Математический маятник — это абстракция, ведь в

реальном мире не бывает ни материальных точек, ни невесомых нитей. Но эта абстракция достаточно точно описывает свойства реальных предметов.

В курсе физики 10 класса выводится замечательная формула

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

выражающая период малых колебаний математического маятника T через длину нити l. Эта формула не может не быть связана с нашим загадочным равенством $\pi^2 \approx g$, ведь в ней участвуют те же действующие лица: π и g...

Предположим, что предложение Гюйгенса о выборе единицы длины было бы принято. Тогда при длине $l = 1$ период $T = 2$. Подставляя эти значения в формулу, получим: $2 = 2\pi\sqrt{1/g}$, или $\pi^2 = g$. Наше загадочное равенство оказалось в точности верным, причем верным по определению единицы длины! Но предложение Гюйгенса было отвергнуто и единица длины была установлена иначе. Как это произошло и чем все-таки объяснить равенство $\pi^2 \approx g$, мы расскажем в следующем разделе. А сейчас — несколько слов о самом Христиане Гюйгенсе.

Он родился 14 апреля 1629 года в семье известного голландского политического деятеля Константина Гюйгенса. Время было бурное — лишь недавно Нидерланды освободились от господства католической церкви и испанского короля. Юный Христиан получил хорошее домашнее образование, в 1645 году поступил в Лейденский университет. После завершения образования он занимается научной работой, сначала в Голландии, а затем в Парижской Академии наук. В конце жизни Гюйгенс возвращается в родную Голландию. Он умирает 8 июля 1695 года.

И в течение этих десятилетий — настоящий ливень работ, результатов, открытий. Многие из них — подлинные шедевры, ставшие классикой науки. Гюйгенс открыл кольцо Сатурна, разработал теорию удара упругих тел (см. «Квант» № 9 за 1988 год), вывел формулу линзы, предложил волновую теорию света, ввел и исследовал развертки кривых — эвольвенты. Гюйгенс был не только ученым, но и замечательным мастером. Он шлифовал линзы, изготавливал и проектировал самые большие для своего времени телескопы, под его руководством был сооружен планетарий. И всю жизнь его интересовали часы. В 1673 году вышла книга Гюйгенса «Маятниковые часы». В этом труде собраны результаты, полученные ученым на протяжении многих лет. Идея маятниковых часов принадлежала Галилею, но Гюйгенс довел эту идею до практического осуществления — он изготовил часы, в которых последовательные равные промежутки времени отмериваются колебаниями маятника. Именно Гюйгенс открыл формулу для периода колебаний маятника с небольшой амплитудой (для колебаний с большим размахом период T уже зависит от амплитуды).

И наконец появился метр... Но вернемся к единице длины, предложенной Гюйгенсом. Ее недостатком оказалось то, что ускорение свободного падения g изменяется на Земле от места к месту. Еще в бытность свою в Париже Гюйгенс познакомился с Рише — молодым сотрудником Академии наук, взятым для помощи академикам в опытах и наблюдениях. Именно Рише впоследствии открыл зависимость длины l секундного маятника от географической широты,— фактически это означало, что g зависит от широты. Есть несколько причин изменения g. Во-первых, g меняется с широтой из-за того, что изменяется расстояние от точки на поверхности Земли до ее оси вращения и, следовательно, изменяется величина центростремительного ускорения тела. Во-вторых, Земля — не идеальный шар, а тело, слегка сплюснутое у полюсов. Из-за этого изменяется сила притяжения тела Землей. В-третьих, земной шар неоднороден, в отдельных его местах залегают пласты более массивных пород. Поэтому универсальной единицы длины на этой основе создать нельзя. Все же в XVIII веке длина секундного маятника (для которого $T=2$) служила своеобразной мерой длины — пусть не очень точной, но легко воспроизводимой.

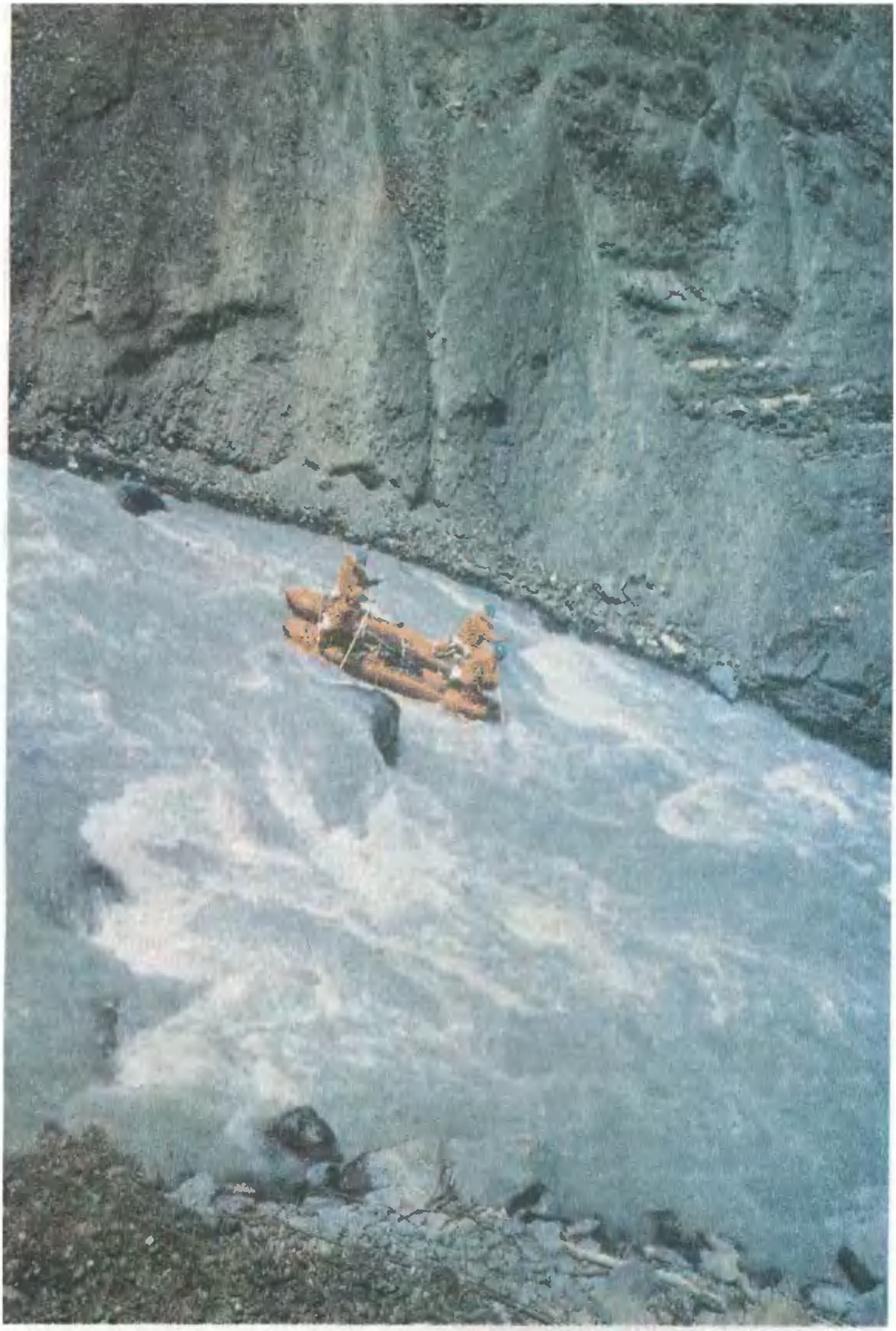
Что же было дальше? В 1789 году произошла Великая Французская революция. В том же году в Генеральные штаты — так назывался парламент Франции в то время — поступило несколько проектов реформы системы мер. До Национального собрания — революционного парламента — дошел лишь один проект, представленный епископом князем Талейраном — будущим знаменитым французским дипломатом. Талейран предложил выбрать в качестве единицы длины длину секундного маятника на широте 45°. Окончательно проект реформы должны были разработать две специальные комиссии. Одна из них — во главе с великим математиком и механиком Лагранжем — предложила десятичные отношения для единиц измерения. Другая — во главе с замечательным математиком, механиком и астрономом Лапласом — занялась поиском надежной и воспроизводимой единицы длины, а также других единиц измерения. Перед комиссией легли два проекта. Один из них — проект Талейрана. Второй — проект самого Лапласа, который, исходя из своего интереса к строению Земли и космологии, хотел, чтобы размеры нашей планеты выражались круглыми числами (т. е. были кратными большим степеням десяти).

Комиссия решила принять предложение Лапласа, но одновременно, по мере возможности, учесть и предложение Талейрана. Для этого за единицу длины приняли 1/10 000 000 часть четверти парижского меридиана — эта величина приближенно равна длине секундного маятника, отличаясь от него всего на 0,6 %. Тем самым принятое решение как бы не отвергало полностью проект Гюйгенса — Талейрана, а лишь несколько «уточняло» его. На принятое решение — взять за «1 метр» 10^{-7} четверти меридиана — повлияло, видимо, еще одно обстоятельство. Предполагалось (и было решено, но, к сожалению, не привилось) разбить прямой угол на 100 градов — вместо привычного нам разбиения на 90 градусов. При этом 1 град на земной поверхности вдоль меридиана составлял бы 10^5 м $=100$ км. 26 марта 1791 года Национальное собрание утвердило предложения комиссии, а 7 апреля 1799 года — и саму величину «метра» (пока временно — вплоть до более точного измерения длины меридиана).

Идея создания единицы длины, для которой не нужен эталон, была будто бы осуществлена: нужен точный «метр» — измеряй меридиан и изготавливай модель «метра». При этом длина метра равнялась длине секундного маятника лишь приближенно, поэтому стало приближенным и равенство $\pi^2 \approx g$. Вот и ответ на вопрос, поставленный нами в начале статьи!

В заключение — два слова о дальнейшем развитии событий. Конечно длина четверти меридиана оказалась равной не точно 10^7 метрам (согласно измерениям 1976 года — 10 001 970 м). Да и измерение меридиана — дело чрезвычайно длительное и дорогостоящее. Так или иначе, стало ясно, что без эталона метра не обойтись. Такой эталон был изготовлен из платино-иридиевого сплава и хранился в Международном бюро мер и весов в Париже.

Наконец, в 1960 году Генеральная конференция по мерам и весам определила метр как 1 650 763,73 длины волны оранжевого света, излучаемого в вакууме криптоном. Так мы вернулись к замыслу Христиана Гюйгенса — взять из самой природы неизменную и воспроизводимую единицу длины.



ФИЗИКА НА ГОРНОЙ РЕКЕ

Доктор физико-математических наук
И. Ф. ГИНЗБУРГ

Мне давно хотелось написать для «Кванта» статью о том, как делается научная работа. Однако описание предмета моих собственных исследований требует слишком громоздкого математического аппарата, недоступного для школьников, и казалось, что моим желаниям не суждено сбыться. Но недавно передо мной возникли две задачи, связанные с моим увлечением — сплавом по горным рекам. Решив их, я понял, что это — прекрасные модели настоящей научной работы, и описание их решения может оказаться интересным. Я попробую восстановить ход решения, начиная с постановки вопроса и мотивов, вызвавших мой интерес, и до этапа, когда я задумывался, как надо изложить результаты, чтобы они были понятны рядовому туристу, знакомому с физикой в объеме забытого курса средней школы.

Но сначала — как мы плаваем.

Сейчас почти нет туристов, плавающих на настоящих деревянных плотах. Многие туристы ходят на байдарках, грузоподъемность типичной двухместной байдарки не менее 300 кг. По горным рекам большинство туристов плавает на плотах или катамаранах с надувными элементами — автомобильными камерами (для плотов) или специально склеенными гондолами из прорезиненной ткани. Деревянный (иногда металлический) каркас массой до 150—200 кг изготавливается на месте. Обычно на одного человека приходится не менее 200 л объема воздуха в гондолах или камерах. Таким образом, запас плавучести (отношение максимальной подъемной силы к весу судна с гребцами) не бывает меньше 1,5. Это позволяет уверенно маневрировать среди валов и камней. Необходимой деталью личного снаряжения является спасательный жилет объемом 16—30 л.

Итак, первый вопрос.

Средняя плотность воды после слива

Туристам «хорошо известно», что после прохождения порога, сразу за сливом, судно «проседает». Дело в том, что в пороге вода перемешивается с воздухом, и после слива (рис. 1) пузырьки воздуха уменьшают среднюю плотность воды.

Я знал это утверждение и неоднократно пересказывал его начинающим «сплавщикам». Но однажды мне захотелось большей определенности в этом вопросе, и я попробовал оценить среднюю плотность воды после слива $\rho_{ср}$. Интуиция подсказывала, что в действительности роль пузырьков значительно меньше, чем об этом думают. А если так — достаточно оценить $\rho_{ср}$ снизу, т. е. получить наименьшее значение $\rho_{ср}$, совместимое с наблюдениями. Но какие наблюдения использовать?

Я вспомнил, что обычно после слива в воде действительно видны всплывающие пузырьки и в то же время при не очень большой глубине камни на дне видны вполне отчетливо (если в воде нет мути). Этого было достаточно, чтобы использовать одну идею, хорошо известную из физики газов и жидкостей.

Будем для простоты считать, что все пузырьки имеют один и тот же радиус r, а их среднее число в едини-

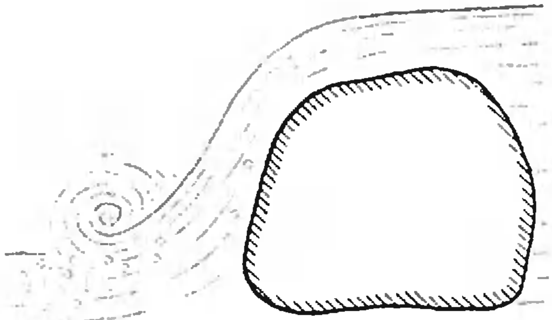


Рис. 1.

це объема (1 л) обозначим через n. Тогда их суммарный объем в единице объема есть $\frac{4}{3}\pi r^3 n$, и, пренебрегая массой воздуха, среднюю плотность воды можно считать равной

$$\rho_{ср}=\rho_0\left(1-\frac{4}{3}\pi r^3 n\right)\ (кг/л),$$

где ρ_0 — плотность «чистой» воды, без пузырьков.

Теперь вернемся к камням, видимым на дне. Если на пути светового луча, идущего от дна, встречаются пузырьки, то сквозь них мы не можем увидеть камня четко — свет рассеивается на пузырьках. Оценим, при какой глубине l на пути светового луча почти наверняка встретится хоть один пузырек. Выделим на дне участок площадью S и рассмотрим столб воды над ним. Его объем lS; в нем находится $N=nlS$ пузырьков, и они «перекрывают» свету площадь, не большую $S_1=N\pi r^2=nlS\pi r^2$. Путь свету полностью «перекрыт», если эта площадь S_1 совпадает с S (мы считаем для простоты, что смотрим почти вертикально вниз, и пренебрегаем случайными перекрываниями, учет которых несущественно меняет ответ). Поэтому наибольшая глубина l_{max} четкого видения дна определяется из условия $S_1=S$, т. е.

$$l_{max}=1/(n\pi r^2).$$

Подставляя это соотношение в выражение для $\rho_{ср}$, получаем

$$\rho_{ср}=\rho_0\left(1-\frac{4}{3}\frac{r}{l_{max}}\right).$$

Это — ответ. Подставим теперь цифры, чтобы понять, что стоит за этой формулой.

Встречаются два сорта сливов. После одних видны довольно крупные пузырьки с $r\lesssim 0{,}5$ см, а глубина видения дна $l_{max}\gtrsim 0{,}5$ м. После других вода кажется молочно-белой от очень мелких пузырьков с $r\lesssim 0{,}1$ см, а глубина видения дна (точнее — предмета в воде) после таких сливов $l_{max}\approx 5$—10 см. Подставляя эти цифры в формулу для $\rho_{ср}$, найдем в обоих случаях $\rho_{ср}\gtrsim 0{,}98\rho_0=0{,}98$ кг/л.

Из формулы для $\rho_{ср}$ видно, что чем меньше размер пузырьков, тем ближе $\rho_{ср}$ к ρ_0. Поэтому с точки зрения поставленной задачи наше предположение об одинаковом большом радиусе всех пузырьков вполне разумно.

Итак, для современных туристских судов с большим запасом плавучести отличие $\rho_{ср}$ от ρ_0 несущественно, и «фольклорное» утверждение, с которого я начал — о проседании судна после прохождения порога,— несправедливо.

А теперь — второй вопрос.

Веревка на туристском судне

В одном из туристских альманахов я увидел статью «О пределах применимости веревки в водном туризме». По расчетам ее автора, безопасно зачалить среднее туристское судно с помощью веревки диаметром 10 мм можно лишь при скорости течения не более 1,5—2 м/с. А мы, используя более тонкую веревку диаметром 6—8 мм, уверенно чалимся на скорости 3—4 м/с. Мне стало ясно, что в статье в расчетах содержится ошибка. Казалось бы — бог с ней. Пусть тот, кто поверит автору, берет более толстую веревку (запас карман не тянет). Но: более толстая веревка — менее гибкая, и работать с ней не очень удобно, т. е. при ее использовании труднее обеспечить безопасность; таскать такую веревку тяжело; из таких расчетов могут проистечь и ошибочные административные решения чиновников от туризма, а им нельзя давать дорогу; наконец, упомянутая статья имеет «очень научный» вид — автор считал на ЭВМ, и его результаты неискушенному читателю кажутся точными...

Мне стало обидно за науку, и я решил сделать правильные расчеты.

Первый вопрос — о точности расчетов. По-видимому, их можно делать довольно грубо, а значит — просто. Ведь если удастся использовать простые наглядные вычисления, обойдясь без второстепенных «уточняющих» деталей, то надежность результатов возрастет. Нестандартность изготовления веревки, небольшие неоднородности по длине (микронадрезы), наконец, изменение свойств веревки при хранении (старение) приводят к разбросу свойств веревки, который никак не меньше 15—20 %. Ясно, что считать с большей точностью не имеет смысла. И мы увидим, что при такой точности расчет становится совсем простым.

Итак, нас интересует такая задача: необходимо остановить в потоке судно массой M с помощью веревки длиной L. *При какой наибольшей скорости течения это возможно?*

Но прежде чем переходить к основным расчетам, поговорим отдельно о веревке и о туристском судне.

Веревка. Довольно подробный рассказ о веревках, используемых в туризме и альпинизме, содержится в статье А. Б. Геллера «Нужна ли альпинисту физика» («Квант», 1988, № 1). Но нам осталось сказать еще немало.

Естественно, нас прежде всего интересует прочность веревки, максимальное натяжение, которое она выдерживает.

Обозначим через L_0 и S_0 длину веревки и площадь ее сечения ($S_0=\pi d^2/4$, где d — диаметр веревки). Хорошо известно, что при сравнительно небольших усилиях F удлинение веревки ΔL пропорционально F (закон Гука):

$$F=E\frac{S_0}{L_0}\Delta L=ES_0\varepsilon, \qquad (1)$$

где E — модуль упругости (он одинаков для обычно употребляемых веревок одинакового плетения), $\varepsilon=\Delta L/L_0$ — относительное удлинение веревки. Соответственно, потенциальная энергия деформации растянутой веревки —

$$W=\frac{k(\Delta L)^2}{2}=\frac{1}{2}ES_0L_0\varepsilon^2. \qquad (2)$$

Эта энергия пропорциональна длине веревки L_0, так что полезно ввести понятие энергии единицы длины веревки w:

$$w=\frac{W}{L_0}=\frac{ES_0\varepsilon^2}{2}=\frac{F\varepsilon}{2}=\frac{F^2}{2S_0E}. \qquad (3)$$

Отметим, что при заданной величине относительного удлинения ε величины F и w пропорциональны S_0 и не зависят от L_0.

Итак, при малых усилиях зависимость ε от F линейная —

$$\varepsilon=\frac{F}{ES_0}. \qquad (1')$$

При больших усилиях эта зависимость нарушается — с ростом силы удлинение начинает расти быстрее, чем по закону (1′). Когда же сила натяжения превышает некоторое значение F_{max}, веревка начинает рваться. Все это отражено на рисунке 2, где приведена так называемая нагрузочная характеристика — зависимость силы натяжения веревки от ее относительного удлинения. Величины F_{max} и ε_{max}, так же как и точный вид нагрузочной характеристики, можно найти в специальных справочниках. Зная их, нам нужно определить w_{max} — максимальную энергию деформации, приходящуюся на единицу длины веревки (она описывается площадью под красной кривой на рисунке 2). Обычно это делают численно (нередко на ЭВМ). Однако, попробуем упростить расчет: заменим нагрузочную характеристику линейным графиком закона Гука (см. (1)), приняв в нем E равным «среднему» значению, которое определим как

$$E_{ср}=\frac{F_{max}}{S_0\varepsilon_{max}}.$$

При этом энергия единицы длины веревки w будет определяться площадью под пунктирной прямой на рисунке 2, которая отображает за-

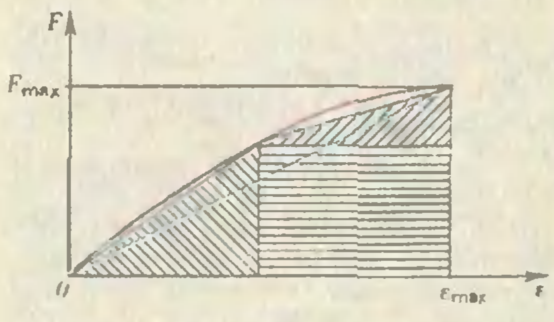


Рис. 2.

висимость

$$F = E_{ср} S_0 \varepsilon_{max}. \qquad (4)$$

Из рисунка видно, что

$$\bar{w} = \frac{1}{2} E_{ср} S_0 \varepsilon_{max}^2 = \frac{F_{max}\varepsilon_{max}}{2} \qquad (5)$$

меньше истинного значения w_{max}. Нам удобно пользоваться заниженным значением — ведь нас интересует безопасность. Но хорошо бы представлять, на сколько мы ошибаемся, т. е. на сколько истинное значение w_{max} больше получающегося из (5). Для этого рассмотрим упрощенную нагрузочную характеристику — синюю ломаную на рисунке 2, которая значительно ближе к истинной кривой, чем пунктирная прямая (4). При удлинениях $\varepsilon < \varepsilon_{max}/2$ имеет место закон Гука (1) с модулем упругости E, а при $\varepsilon > \varepsilon_{max}/2$ для добавки силы выполняется закон Гука с модулем упругости $E/2$. При этом

$$E_{ср} = \frac{3}{4} E, \text{ т. е. } E = \frac{4}{3} E_{ср}.$$

В этом случае энергия единицы длины веревки, растянутой до удлинения ε_{max},— она вычисляется как площадь под зеленой ломаной — равна

$$\bar{\bar{w}} = \frac{1}{2} E S_0 \left(\frac{\varepsilon_{max}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{E}{2}\,S_0\left(\frac{\varepsilon_{max}}{2}\right)^2 + E S_0 \frac{\varepsilon_{max}}{2}\cdot\frac{\varepsilon_{max}}{2} = \frac{7}{16} E S_0 \varepsilon_{max}^2 = \frac{7}{12}\,E_{ср} S_0 \varepsilon_{max}^2.$$

Сравнивая с (5), мы видим, что

$$\bar{\bar{w}} = \frac{7}{6}\,\bar{w} \approx 1{,}17\bar{w},$$

т. е. в пределах нашей точности различие несущественно.

Для хорошей альпинистской веревки должно быть $\varepsilon_{max} = 0{,}25$—$0{,}3$. К сожалению, советская веревка дает меньшие значения. Я принял $\varepsilon_{max} = 0{,}15$. Это немного меньше, чем дают прямые измерения, известные мне. Приведем также известное из опыта значение F_{max} и величину w_{max}, вычисленную по формуле (5) (все — для веревки диаметром 10 мм):

$$F_{max} = 12\,000 \text{ Н} (\pm 10\text{—}15\ \%),$$
$$w_{max} = 900 \text{ Дж/м} (\pm 20\text{—}25\ \%). \qquad (6)$$

Формулы (1) и (2) позволяют пересчитать эти цифры для других веревок. (Ну а для туристов из этих вычислений можно сообщить только минимум, зато надо дать таблицу значений F_{max} и w_{max} для основных используемых веревок.)

Но тут же передо мной встал следующий вопрос: а если кто-то использует другую веревку? или хочет более точных цифр? Надо придумать простые способы измерения F_{max} и w_{max}.

С измерением w_{max} все просто. Возьмите короткий кусок веревки длиной L. Жестко закрепите один конец веревки, привяжите к другому концу груз, поднимите его вертикально вверх (насколько можно), а затем предоставьте грузу свободно падать. Повторяйте опыт, понемногу увеличивая массу груза. Если веревка порвалась при массе груза m, то $w_{max} = 2mg(1 + a/L)$ Дж/м, где a — расстояние от точки закрепления веревки на грузе до его центра тяжести. (До разрыва центр тяжести опустится на $2(L + a)$, т. е. потенциальная энергия уменьшится на $2mg(L + a)$. Эта энергия перейдет в энергию растянутой веревки $w_{max}L$. Приравнивая энергии, получим приведенный результат. Здесь не учтена добавка к измерению потенциальной энергии, связанная с удлинением веревки,— $mg\cdot\Delta L = mgL\varepsilon_{max}$. За счет этого полученное значение w_{max} на 7—10 % меньше истинного, что полезно для наших целей.)

К сожалению, столь же простого способа измерения F_{max} мне придумать не удалось. Вот мой рецепт. Жестко закрепите один конец короткого куска веревки, а нагрузку на второй плавно увеличивайте с помощью автомобиля или лебедки. Если веревка порвется при усилии $F_р$, то, с учетом необходимости неоднократного использования ее, F_{max} должно быть $\sim 0{,}9F_р$. Если у вас есть специальный динамометр, рассчитанный на усилия в тысячи ньютонов, вы можете с его помощью определить $F_р$. Если такого динамометра нет, воспользуйтесь лебедкой, к рукоятке которой подвешен груз. Увеличивайте груз, пока при некотором значении $m_р$ не произойдет разрыв. Тогда $F_р = m_р gH/r$, где H — расстояние от оси лебедки до груза, а r — радиус барабана лебедки.

На этом оставим пока веревку и займемся судном.

Судно. При движении в воде большую роль играет сила сопротивления, действующая со стороны воды на судно. Ее можно записать в виде

$$F_с = \alpha\rho S u^2,$$

где u — скорость воды относительно судна, ρ — плотность воды, S — площадь сечения погруженной в воду части судна (сечение перпендикулярно потоку), α — численный коэффициент, зависящий от обводов судна ($\alpha \lesssim 0,5$). В действительности этот коэффициент зависит и от скорости, но эта зависимость существенна только на гладкой воде, и мы ее учитывать не будем.

Сначала я делал оценки, используя эту формулу. Но насколько они надежны? Ведь и коэффициент α, и площадь S известны очень плохо. И тогда я сообразил, что эти два параметра можно объединить в один, который я назвал эффективной длиной судна. Согласно закону Архимеда масса судна $M = \rho V$, где V — объем погруженной в воду части судна, приблизительно равный произведению S на длину судна по ватерлинии l. Эффективной длиной судна $l_{эф}$ я назвал величину l/α. Тогда

$$F_с = \frac{Mu^2}{l_{эф}}. \qquad (7)$$

Сначала я оценил $l_{эф}$ совсем грубо. Поскольку $\alpha \lesssim 0,5$ и длина судна l обычно не меньше 4 м, то $l_{эф} \gtrsim 8$ м. Но потом я понял, что $l_{эф}$ можно измерить.

Разгоним судно на стоячей воде до какой-то скорости v_0, а потом отпустим. Дальнейшее его движение под действием силы сопротивления описывается вторым законом Ньютона:

$$Ma = -\frac{Mv^2}{l_{эф}}.$$

При этом изменение кинетической энергии судна на пути Δx равно работе силы сопротивления на этом пути, т. е.

$$\Delta\left(\frac{Mv^2}{2}\right) = -\left(\frac{Mv^2}{l_{эф}}\right)\Delta x,$$

или

$$\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{v^2}{l_{эф}}\Delta x.$$

Будем искать теперь скорость в зависимости не от времени, а от пройденного пути x. Из уравнения для энергии видно, что отношение v/v_0 зависит только от $x/l_{эф}$, т. е. $v/v_0 = f(x/l_{эф})$. Аккуратное решение дает

$$v/v_0 = e^{-x/l_{эф}} \approx (2,7)^{-x/l_{эф}}. \qquad *)$$

Таким образом, вот способ измерения $l_{эф}$: путь, пройденный судном к тому времени, когда его скорость уменьшится в 2,5—3 раза (точнее в $e \approx 2,7$ раз), примерно равен $l_{эф}$. Из наблюдений мы хорошо знаем, что такой путь практически для всех судов больше, чем 10 м, т. е. $l_{эф} \gtrsim 10$ м (как я и считал раньше)

Зачаливание судна

Теперь можно перейти к решению основной задачи: при какой наибольшей скорости течения v_{max} судно массой M можно зачалить (остановить) с помощью веревки длиной L?

Чтобы разобраться в ситуации, рассмотрим сначала простейший случай — приближение, когда сопротивлением воды можно пренебречь. В этом случае решение таково. Начальная кинетическая энергия судна $Mv^2/2$ переходит в потенциальную энергию натянутой веревки W. Максимальное значение этой энергии $W_{max} = w_{max}L$ найдено выше. Таким образом, максимальная скорость, при которой судно можно остановить на быстротоке (без учета давления по-

*) Для тех, кто знаком с дифференцированием, заметим, что это соотношение есть решение уравнения баланса энергии, которое можно переписать в виде $dv/v = -dx/l_{эф}$.

тока) определяется из уравнения

$$\frac{1}{2}Mv_{max}^2 = w_{max}L$$

и составляет

$$v_{max} = \sqrt{2w_{max}L/M}. \qquad (8)$$

При заданном значении v_{max} минимальная длина веревки должна быть

$$L_{min} = \frac{1}{2}\frac{Mv_{max}^2}{w_{max}}. \qquad (9)$$

Далее мы используем простое приближение (4). При этом энергия растянутой веревки $W = F^2L/2S_0E_{ср}$ (см. формулы (2), (3)). Приравнивая это выражение к кинетической энергии судна, получаем, что при скорости течения $v < v_{max}$ максимальное натяжение веревки есть

$$F_v = F_{max}\frac{v}{v_{max}}. \qquad (10)$$

Ну а теперь выясним, какова роль силы сопротивления воды. Эта сила максимальна, когда судно остановилось, и при скорости потока v составляет $F_c = Mv^2/l_{эф}$.

Найдем отношение этой добавки к натяжению веревки F_v. С учетом соотношений (3), (8) и (10),

$$\frac{F_c}{F_v} = \frac{Mv^2}{l_{эф}F_v} = \frac{Mv^2}{l_{эф}F_{max}(v/v_{max})}\cdot\frac{Mv_{max}^2/2}{Mv_{max}^2/2} =$$

$$= \frac{v^2}{l_{эф}(v/v_{max})}\cdot\frac{2LF_{max}\varepsilon_{max}/2}{v_{max}^2F_{max}} =$$

$$= \frac{L\varepsilon_{max}}{l_{эф}}\cdot\frac{v}{v_{max}}.$$

Таким образом, роль сопротивления воды описывается параметром

$$\beta = L\varepsilon_{max}/l_{эф}.$$

Обычно при таком зачаливании используется веревка не длиннее 20 м. При $\varepsilon_{max} = 0{,}15$ это дает полное удлинение веревки 3 м, и при $l_{эф} \gtrsim 10$ м

$$\beta \lesssim 1/3.$$

Итак, при скорости течения меньше v_{max} величина F_c не превосходит $F_{max}/3$. Поэтому добавка, обусловленная давлением потока, играет небольшую роль, и предельная скорость близка к v_{max}.

Ну а теперь надо дать численные оценки для туристов. Пусть судно необходимо остановить на струе при скорости течения 4 м/с = 14 км/ч (это большая скорость!).

Необходимые параметры для веревки мы определим из формул (9), (3) и (6). Чтобы учесть разброс параметров и давление потока, мы подставим в формулу (9) несколько большее значение $v_{max} = 5$ м/с. Результаты расчетов для судов разных масс приведены в таблице, где указана (округленно) минимальная длина чальной веревки при различных типовых значениях ее диаметра. Это, собственно, и есть главный результат.

Масса судна	Диаметр веревки и ее минимальная длина
200 кг	6 мм, 10 м
400 кг	6 мм, 20 м или 8 мм, 10 м
800 кг	8 мм, 20 м или 10 мм, 10 м
1200 кг	10 мм, 20 м

И в заключение рассмотрим еще один вариант зачаливания.

Поперечная веревка. Иногда для остановки судна поперек реки навешивают веревку. Конец чальной веревки с идущего судна с помощью крюка цепляется за эту поперечную веревку. Ее навешивают под углом к течению, чтобы судно соскользнуло вдоль нее к берегу, или предусматривает ее обрыв с одного берега так, чтобы судно «маятником» пришло к другому берегу.

Если эти варианты реализовать нельзя, веревку навешивают поперек течения. При натяжении чальной веревки натягивается и эта поперечная веревка. Ее натяжение возьмет

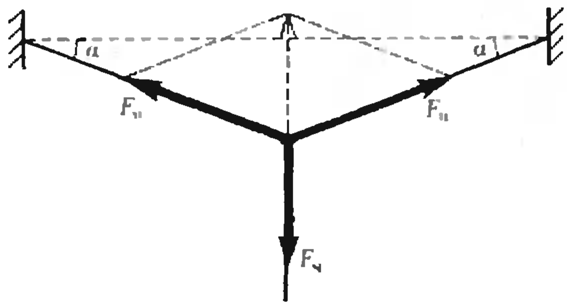


Рис. 3.

на себя часть кинетической энергии судна. Но не приведет ли это к разрыву поперечной веревки? Действительно, если натяжение чальной веревки судна есть $F_ч$, то натяжение поперечной веревки $F_п = F_ч/2\sin\alpha$, где α — угол между направлением растянутой веревки и ее первоначальным направлением (рис. 3). Если угол α меньше 30°, то $F_п$ больше $F_ч$, т. е. очень туго натянутая веревка может порваться. Разберемся в этом поподробнее. При $\alpha = 30°$ длина поперечной веревки должна быть в $2/\sqrt{3} \approx 1{,}15$ раз больше расстояния между точками закрепления. Но предельное относительное удлинение $\varepsilon_{max} = 0{,}15$, т. е. если первоначально веревка не была натянута, ее длина в растянутом состоянии составит почти точно нужную величину, а провис под собственной тяжестью создаст необходимый резерв длины (он нужен, например, если судно идет не по центру веревки).

Некоторые выводы

Обсудим теперь то общее, что было в обоих примерах, схему их решения.

Первый этап — вопрос, не очень четко поставленный. (Какова средняя плотность воды после порога? Какой веревкой можно пользоваться?)

Второй этап — осмысление ситуации и постановка задачи (с частичным угадыванием ответа): показать, что изменение средней плотности воды после порога ничтожно мало; определить, какую веревку надо использовать при принудительном зачаливании. Сюда же относится предварительная оценка погрешности последующего решения.

Третий этап — собирание и организация сведений; оценка базовых параметров. В наших примерах хватило уже имевшихся у меня знаний. Вообще же на этом этапе могут потребоваться дополнительные, вспомогательные эксперименты. Очень важным шагом на этом этапе было формальное решение с использованием избытка данных (например, S и α в формуле для силы сопротивления). Это позволило, представив ответ, избавиться от определения большого числа ненужных промежуточных величин, заменяемых одной легко оцениваемой величиной (в нашем случае $l_{эф}$).

И только после этого выполняется **четвертый этап** — решение задачи, т. е. получение формул, а затем и чисел. Без чисел, без знания соотношения параметров невозможно понять, правильное ли решение получено, или реальная ситуация решающим образом определяется совсем другими причинами. Важным является и вопрос о том, как представить полученные результаты, ибо решение реальной задачи обычно адресуется какому-то «потребителю».

Задачник „Кванта"

Задачи

М1171—М1175, Ф1178—Ф1182

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1171» или «Ф1178». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1171. Обозначим сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ через h_n. Докажите (для каждого натурального n) неравенство

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{2h_2^2}+\frac{1}{3h_3^2}+\ldots+\frac{1}{nh_n^2}<2.$$

Л. Д. Курляндчик

М1172. Какой наибольший угол могут составлять между собой отрезки OA и OB, выходящие из начала O прямоугольной системы координат в пространстве, если точка A имеет координаты (x, y, z), а точка B — координаты (y, z, x)?

С. Н. Бычков

М1173*. Через одну точку внутри треугольника площади S проведены три прямые так, что каждую сторону треугольника пересекает две из них (см. рисунок). Докажите, что для площадей S_1, S_2, S_3 трех образовавшихся при этом треугольников выполнено неравенство

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geqslant\frac{9}{S}.$$

Г. Н. Зайцев

М1174*. Последовательность целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задается условиями $a_1=1$, $a_2=12$, $a_3=20$,

$$a_{n+3}=2a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Докажите, что для любого номера n число $1+4a_na_{n+1}$ — квадрат целого числа.

Р. Козарев и С. Дойчев (Болгария)

М1175*. При каких натуральных n верно следующее утверждение: как бы ни были разложены на плоскости несколько непересекающихся правильных n-угольников, один из них можно выдвинуть по некоторому направлению, не задевая остальных? (Поворачивать n-угольник нельзя, то есть все лучи, выходящие из точек выбранного n-угольника в нужном направлении, не должны задевать остальных n-угольников.)

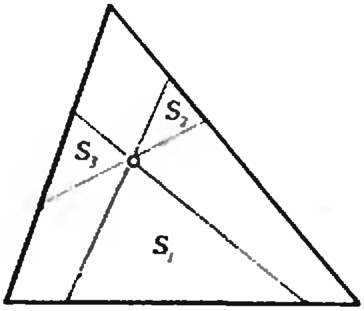
Д. А. Терешин

Ф1178. В пространстве падает лист фанеры. Оказалось, что в некоторый момент времени скорости двух точек листа a и b одинаковы — $\vec{v}_a=\vec{v}_b=\vec{v}$ — и лежат в плоскости листа. Оказалось также, что скорость точки листа c, находящейся от точек a и b на расстояниях, равных расстоянию между точками a и b, в два раза больше скорости v. Где в данный момент на листе находятся точки, скорости которых равны $3v$?

К. С. Сергеев

Ф1179. Если молния во время грозы попала в воду, то после грозы на озере иногда видят всплывшую мертвую рыбу. Как это объяснить? Ведь вероятность попадания молнии в отдельно взятую рыбу ничтожно мала.

А. И. Буздин



Задачник „Кванта"

Ф1180. Лампочка, присоединенная к батарейке, горит три часа, после чего батарейка полностью разряжается. Сделали копию этой батарейки вдвое больших линейных размеров из тех же материалов. Сколько времени будет гореть та же лампочка, подключенная к такой копии? Внутреннее сопротивление батарейки много меньше сопротивления лампочки.

К. С. Бедов

Ф1181. Жесткое тонкое проводящее кольцо лежит на непроводящей горизонтальной поверхности и находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны. Масса кольца m, радиус R, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по кольцу, чтобы оно начало приподниматься?

С. С. Кротов

Ф1182. При проведении радиолокации Луны, взошедшей над горизонтом, чтобы обеспечить правильную направленность, излучатель высокочастотных радиосигналов был сопряжен с оптическим телескопом. Однако при наличии оптического изображения Луны отсутствовал отраженный радиосигнал. В то же время, когда удавалось получить отраженный радиосигнал, не было оптического изображения. Объясните это явление.

А. Р. Зильберман

Решения задач

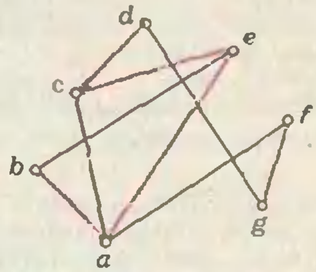
М1147—М1150, Ф1158—Ф1162

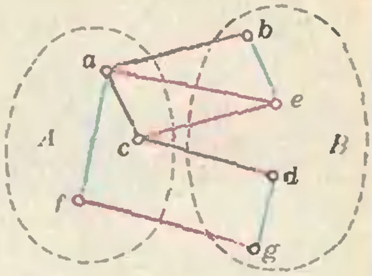
М1147. *Задано несколько точек, соединенных отрезками двух цветов: некоторые пары точек — голубыми отрезками, некоторые другие — красными. Известно, что в любом замкнутом пути, состоящем из нескольких отрезков, число красных отрезков четно. Докажите, что все точки можно разбить на два множества так, что каждый красный отрезок соединяет точки из разных множеств, а каждый голубой — точки из одного и того же множества.*

Возьмем одну из заданных точек a и рассмотрим все точки, соединенные с a путем из данных отрезков. Если такой путь содержит четное число (возможно, нуль) красных отрезков, то отнесем соответствующую точку к множеству A, в частности, $a \in A$; если же число красных отрезков на таком пути нечетно, то отнесем его конец к множеству B (см. рисунок). Это правило разбиения корректно: если в некоторую точку x можно было прийти из a по двум разным путям, причем в одном из них было бы четное, а в другом — нечетное число красных отрезков, то они составили бы замкнутый путь с нечетным числом красных отрезков, что по условию невозможно.

Ясно, что любой отрезок, соединяющий точки разных множеств, — красный, а любой отрезок, соединяющий две точки множества A, — синий. Отрезок, соединяющий две точки y и z множества B также синий, — если бы он был красным, то, присоединив его к пути из a и b с нечетным числом красных отрезков, мы получили бы путь из a в z с четным числом красных отрезков.

Если есть еще точки, с которыми точка a вообще не связана никаким путем, — заданная конфигурация





точек и отрезков состоит из нескольких связных компонент, — то можно взять по *одной* точке в каждой связной компоненте и для каждой из них построить требуемое разбиение.

Н. Б. Васильев

М1148. *Докажите, что для любого* $a > 1$, $a \neq \sqrt[p]{q}$ *(p и q целые) и натурального n выполняется равенство*
$$[\log_a 2]+[\log_a 3]+\ldots+[\log_a n]+[a]+[a^2]+\ldots+[a^k]=nk,$$
где $k=[\log_a n]$ *($[x]$ — целая часть числа x).*

Для любого положительного z число $[z]$ равно количеству натуральных чисел, не превосходящих z, поэтому $[\log_a m]$ есть количество точек вида $(m; y)$, где y — натуральное число, не превосходящее $\log_a m$, а сумма $[\log_a 2]+[\log_a 3]+\ldots+[\log_a n]$ — это количество точек с натуральными координатами, лежащих ниже графика $y=\log_a x$ и левее прямой $x=n$. Аналогично, $[a]+[a^2]+\ldots+[a^k]$ — это количество точек с натуральными координатами, лежащих ниже прямой $y=k$ и левее графика $y=\log_a x$. Эти два множества точек не пересекаются, так как по условию на самом графике целочисленных точек нет (за исключением $(1; 0)$). А объединение этих множеств, очевидно, дает все целочисленные точки $(x; y)$ в прямоугольнике $1 \leqslant x \leqslant n$, $1 \leqslant y \leqslant k$, число которых равно kn.

Р. Б. Алексеев, Л. Д. Курляндчик

М1149. *На плоскости заданы два луча p, q с вершинами в точках P и Q соответственно. Две окружности — одна с центром на луче p, проходящая через точку P, и другая с центром на луче q, проходящая через Q, — касаются друг друга в точке M внешним образом. Найдите множество точек M.*

Обозначим через l и m прямые, перпендикулярные лучам p и q, проходящие через их концы (P и Q); через Π_l и Π_m — соответствующие полуплоскости, заполняемые нашими окружностями с центрами на p и на q. Очевидно, что когда одна из касающихся друг друга окружностей увеличивается, другая уменьшается так, что точка касания M описывает некоторую *линию*, лежащую в пересечении $\Pi_l \cap \Pi_m$; ее концы соответствуют крайним положениям, когда одна из окружностей вырождается либо в точку (P или Q), либо — в прямую (l или m); концы линии не принадлежат искомому множеству. Мы докажем, что эта линия — дуга окружности, проходящей через точки P и Q; для этого нужно лишь проверить, что величина угла PMQ постоянна.

Предположим, что лучи расположены, как на рисунке 1 (искомое множество здесь — голубая дуга). Пусть

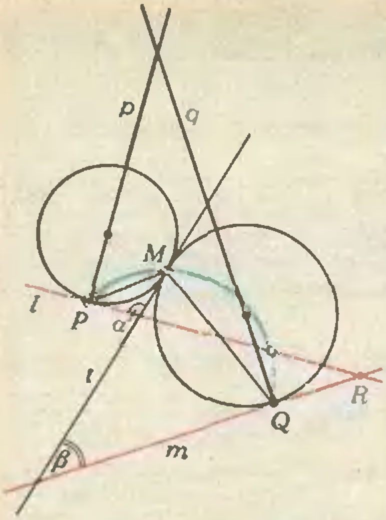


Рис. 1.

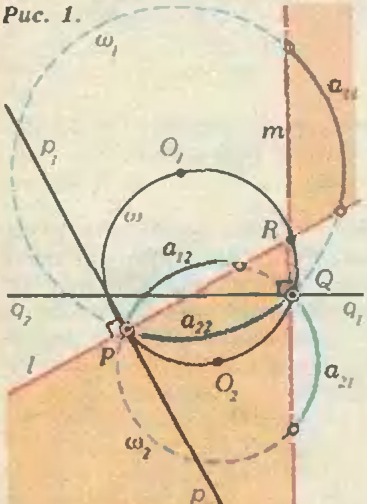


Рис. 2.

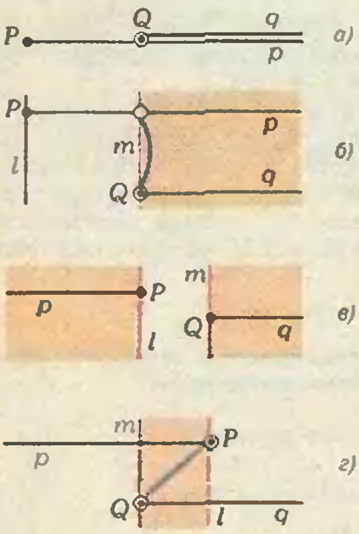


Рис. 3.

R — точка пересечения прямых l и m, t — общая касательная к окружностям в точке M, α и β — углы, образуемые ею с прямыми l и m. Тогда $\alpha+\beta=180^\circ-\angle PRQ$ и $\angle PMQ=\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}=180^\circ+$ $+\angle PRQ$.

Обратно, через любую точку M голубой дуги проходят две касающиеся в ней окружности, удовлетворяющие условию задачи (если провести через M прямую, составляющую углы $\alpha=180^\circ-2\angle MPR$ и $\beta=180^\circ-\alpha-$ $-\angle PRQ$, то образуются два равнобедренных треугольника с основаниями MP и MQ).

Аналогичное доказательство можно дать и для любого другого расположения лучей: величина $\alpha+\beta$ (и, следовательно, $\angle PMQ$) всегда выражается через угол между прямыми l и m (т. е. через $\angle PRQ$), поскольку углы α и β между касательными (l и t, t и m) расположены по разные стороны от прямой t.

Заметим, что центр O голубой дуги — это середина дуги PQ окружности, проходящей через точки P, Q, R: например, для расположения, показанного на рисунке 1, $\angle POQ=\angle POM+\angle MOQ=2(180^\circ-\angle PMQ)=180^\circ-$ $-\angle PRQ$ и, конечно, $OP=OQ$.

Сформулируем ответ в общем виде; для этого удобно дополнить лучи p и q до прямых (рисунок 2; мы считаем, что прямые l и m пересекаются). Опишем окружность ω вокруг треугольника PQR и из концов ее диаметра, перпендикулярного хорде PQ, проведем как из центров окружности через точки P и Q; пусть ω_1 — та из них, внутри которой лежит точка R, а ω_2 — вторая. Если $\Pi_l\cap\Pi_m$ это угол PRQ или вертикальный к нему, то искомое множество есть дуга окружности ω_1, заключенная внутри этого угла; если это угол, смежный с $\angle PRQ$, то нужно взять заключенную внутри него дугу ω_2. (Концы дуг выбрасываются.)

Другими словами, если на рисунке 2 в качестве луча p взять p_i ($i=1, 2$), а в качестве луча $q-q_j$ ($j=1, 2$), то ответом будет голубая дуга a_{ij}.

Отметим, что если в условии заменить лучи на содержащие их прямые и рассматривать как внешнее, так и внутреннее касания окружностей, то искомым множеством будет объединение окружностей $\omega_1\cup\omega_2$ (без точек P и Q).

На рисунке 3 изображен ответ для частных случаев, когда $l\parallel m$: в случае а) это — одна точка, б) — дуга окружности с диаметром PQ, в) — пустое множество, г) — отрезок PQ (это можно получить из общего случая, приняв за ω_1 прямую PQ, а за ω_2 — окружность с диаметром PQ).

Читатели, знакомые с инверсией, могли применить к нашей задаче это преобразование: после инверсии с центром P дело сводится к отысканию множества точек касания пучка параллельных прямых и пучка окружностей, касающихся заданной прямой в заданной точке; это множество лежит на двух прямых, проходящих через заданную точку.

В. Н. Дубровский

Задачник «Кванта»

М1150*. *Докажите, что при любых положительных $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ выполнено неравенство*

$$\frac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)} \leqslant \frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

Применяя последовательно известное неравенство Коши — Буняковского

$$x_1y_1+\ldots+x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\,\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$$

(см. «Квант» № 8 за 1987 г., с 42) для чисел $x_k=\sqrt{a_k(a_{k+1}+a_{k+2})}$, $y_k=\sqrt{a_k/(a_{k+1}+a_{k+2})}$, где $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$, и почти очевидные неравенства $a_ia_j\leqslant(a_i^2+a_j^2)/2$, получим

$$(a_1+\ldots+a_n)^2=(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)=$$
$$=(a_1(a_2+a_3)+\ldots+a_n(a_1+a_2))\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right)=$$
$$=(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_na_1+a_na_2)\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right)=$$
$$=\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2}+\frac{a_1^2+a_3^2}{2}+\ldots+\frac{a_n^2+a_1^2}{2}+\frac{a_n^2+a_2^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right)=2(a_1^2+\ldots+a_n^2)\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right).$$

Тем самым требуемое неравенство доказано. Очевидно, оно обращается в равенство только при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Е. Г. Моисеев

От редакции. На одной из Всесоюзных олимпиад предлагалось доказать, что сумма, стоящая в правой части данного в условии неравенства, не меньше $n/4$ (см. задачу 128 в книге «Задачи Всесоюзных математических олимпиад», М.: Наука, 1988). Отыскание точных оценок этой суммы снизу — очень трудная задача, о которой мы постараемся рассказать в отдельной статье.

Ф1158. *Автомобиль повышенной проходимости может использовать в качестве ведущих либо передние, либо задние колеса. Водитель хочет буксировать тросом тяжелый груз. Какую максимальную силу тяги T (без рывка) сможет развить автомобиль, если коэффициент трения колес о дорогу $\mu=0{,}4$, масса автомобиля $M=2$ т, расстояние между центрами колес $l=4$ м, радиус колес $R=0{,}3$ м? Передняя и задняя оси расположены в одной горизонтальной плоскости; центр масс автомобиля лежит в этой плоскости на равном расстоянии от осей; в этой же плоско-*

Максимальная сила тяги, которую может развить автомобиль, когда он трогается с места, определяется силой трения ведущих колес о землю.

Рассмотрим сначала случай, когда ведущие колеса — задние. На рисунке показаны силы, действующие на автомобиль: Mg — сила тяжести, N_1 и N_2 — силы реакции для задних и передних колес соответственно, F — сила трения ведущих колес и T — сила натяжения троса (равная силе тяги автомобиля). Из условия баланса сил по вертикали имеем

$$N_1+N_2-Mg=0.$$

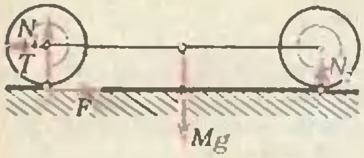
Условие равенства нулю суммарного момента сил относительно центра масс автомобиля дает

$$N_1\frac{l}{2}-N_2\frac{l}{2}-FR=0.$$

Максимальное значение силы трения равно

$$F=\mu N_1.$$

Решая совместно три полученных уравнения (для трех неизвестных), находим силу трения, а значит, и искомую *сти лежит трос. Какие колеса должны быть ведущими? Зависит ли от этого T?*



силу тяги автомобиля:

$$T=F=\frac{\mu Mg}{2(1-\mu R/l)}=4120\ \text{Н}.$$

Заметим, что для задних колес сила реакции, а значит, и сила давления на них больше половины веса автомобиля, а для передних колес — меньше.

Если ведущие колеса — передние, то сила трения (и, следовательно, сила тяги) $F=\mu N_2$, а остальные уравнения остаются теми же. В результате получаем

$$T=F=\frac{\mu Mg}{2(1+\mu R/l)}=3880\ \text{Н}.$$

Таким образом, мы видим, что бо́льшая сила тяги развивается в том случае, когда ведущие колеса — задние.

В реальной ситуации центр масс автомобиля находится обычно ближе к задней оси, чем к передней. Но и тогда тоже наибольшая сила тяги развивается в случае задних ведущих колес.

А. И. Буздин

Ф1159. *Представьте, что вы находитесь в движущейся с ускорением электричке и идете с постоянной относительно вагона скоростью вперед по ходу поезда. Весьма ощутимая сила толкает вас назад, и вы, несомненно, совершаете работу против этой силы. На что же расходуется ваша работа? Видимо, она не может идти на дополнительный разгон электрички — ведь вы толкаете ее назад. В чем же здесь дело? Не нарушается ли закон сохранения энергии?*

Энергетические затраты электрички, когда человек отдыхает на сидении или когда он идет с постоянной относительно вагона скоростью, одинаковы. Действительно, в обоих случаях ускорения человека одинаковы, поэтому одинаковы и силы, действующие на электричку со стороны человека. Значит, человек работает «на себя». Проверим это предположение.

Пусть a — ускорение электрички. За время Δt, в течение которого скорость электрички изменяется от v до $v+a\Delta t$, сидящему человеку массой m сообщается энергия

$$E_1=\frac{m(v+a\Delta t)^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}((v+a\Delta t)^2-v^2).$$

Если же человек движется вперед со скоростью u относительно вагона, то за это же время его кинетическая энергия должна увеличиться на величину

$$E_2=\frac{m(v+a\Delta t+u)^2}{2}-\frac{m(v+u)^2}{2}=\frac{m}{2}((v+a\Delta t)^2-v^2)+ \\ +mua\Delta t.$$

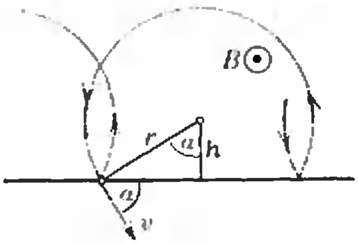
Первое слагаемое в этом выражении «обеспечивает» работа двигателей электрички (такая же, как в первом случае), а дополнительная энергия $mua\Delta t$ возникает как раз за счет работы мышц человека. В самом деле, сила, работу против которой совершает человек, равна ma; за время Δt человек пройдет по вагону путь $u\Delta t$; следовательно, он совершит работу, равную $mau\Delta t$.

Таким образом, действительно работа мышц при ходьбе обеспечивает большее изменение кинетической энергии человека, чем в случае, когда он сидит. Поэтому с законом сохранения энергии и на этот раз все в порядке.

А. Н. Коротков

Задачник „Кванта"

Ф1160. *В цилиндре радиусом R и высотой H находится N электронов. Параллельно оси цилиндра приложено постоянное магнитное поле индукцией B. Предполагая, что все электроны имеют одинаковые по величине скорости v, лежащие в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, а удары электронов о стенки цилиндра абсолютно упругие, оцените, чему равно и как зависит от магнитного поля давление на стенки цилиндра, которое создает такой «электронный газ» (давление можно найти с точностью до постоянного коэффициента, не зависящего от магнитного поля). Заряд электрона e, масса m. Считать, что $(mv/eB) \ll R$ («сильное» поле B). Взаимодействием электронов друг с другом пренебречь.*



В магнитном поле все электроны будут двигаться по дугам окружностей радиусом

$$r = \frac{mv}{eB} \ll R.$$

Соударяться со стенками цилиндра будут только те электроны, центр орбит которых находится от стенок на расстоянии $h < r$ (см. рисунок). При каждом соударении электрон передает стенке импульс

$$\Delta P = 2mv \sin \alpha,$$

а происходят эти соударения с интервалом во времени

$$\Delta t = \frac{2(\pi - \alpha) r}{v}.$$

Для оценки давления «электронного газа» на стенки цилиндра будем считать, что каждый электрон действует на стенку с силой

$$f = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{mv^2 \sin \alpha}{(\pi - \alpha) r}.$$

Количество электронов, соударяющихся с небольшим участком стенки площадью S, равно

$$z = 2rSn = 2rS\frac{N}{\pi R^2 H}$$

(здесь n — плотность электронов в цилиндре).

Тогда искомое давление «электронного газа» можно представить в виде

$$p = \frac{z f_{ср}}{S} = 2rn f_{ср} = 2rn\frac{mv^2}{r}\left(\frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha}\right)_{ср} = 2nmv^2 C,$$

где $f_{ср}$ — сила, с которой электрон действует на стенку, усредненная по положению центра его орбиты, а $C = (\sin \alpha / (\pi - \alpha))_{ср}$ — некоторое постоянное число, не зависящее от магнитного поля.

Окончательно давление «электронного газа» на стенки цилиндра (с точностью до постоянного коэффициента) равно

$$p = 2Cnmv^2 = \frac{2CNmv^2}{\pi R^2 H}$$

и не зависит от магнитного поля.

Д. А. Купцов

Ф1161. *В архитектурной акустике хорошо известно явление «шепчущей» галереи. В крупных соборах (например, в соборе Святого Петра в Риме) по окружности основания купола устроена огороженная пло-*

Представим себе, что в точке A находится *направленный* источник звука (это соответствует случаю говорящего человека). Тогда из узкого пучка лучей, направленных непосредственно в точку B, до нее дойдет, строго говоря, лишь один луч (рис. 2, *а*). Остальные лучи попадут в близкие к B, но другие точки. Если тот же пучок лучей, вышедших из точки A, направлен вдоль стены галереи, то в точку B попадет уже не один, а много *щадка (галерея), куда разрешен доступ туристам. Давно было замечено, что негромкая речь в точке A (рис. 1) хорошо слышна в точке B, если говорящий смотрит вдоль стены галереи. Но если говорящий смотрит в направлении на точку B, то при такой же громкости речи в точке B ничего не слышно. Почему это происходит?*

В точке A ненаправленный источник звука испускает достаточно громкий импульс длительностью τ_1. Какова будет длительность импульса, принятого в точке B? Диаметр галереи d.

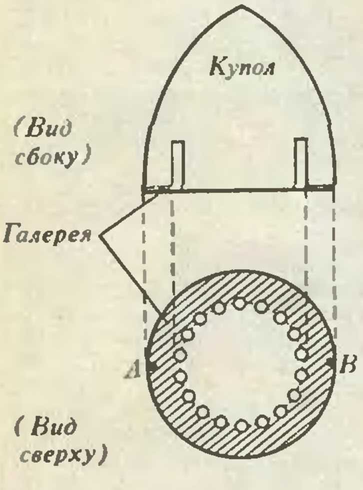


Рис. 1.

лучей, отраженных от стены галереи (рис. 2, б). Вот почему «выгоднее» говорить вдоль стены — звук при этом как бы стелется вдоль «шепчущей» галереи.

Если же в точке A находится *ненаправленный* излучатель достаточно громкого звука, то этот звук может попасть в точку B многими путями. Кратчайший из них — напрямик от A к B. Сигнал, идущий таким путем, придет первым, и ему понадобится время

$$\tau_0=\frac{d}{v},$$

где v — скорость звука. Затем придут два сигнала (один справа, другой слева — см. рис. 3), однократно отраженные от стены галереи. Потом последуют двукратно, трехкратно и так далее многократно отраженные сигналы. Последними придут два сигнала, вышедшие из A практически по касательной к стене галереи в две противоположные стороны. Каждый из этих сигналов, отразившись от стены очень большое число раз, пройдет путь, практически равный половине длины окружности галереи. Для этого потребуется время

$$\tau=\frac{\pi d/2}{v}=\frac{\pi d}{2v}.$$

Разница во времени распространения первого и последнего сигналов составит

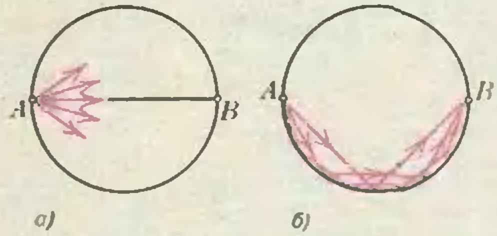


Рис. 2.

Рис. 3.

$$\Delta\tau=\tau-\tau_0=\frac{d}{v}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Именно на такое время будет затянут звуковой импульс, испущенный в точке A, по отношению к точке B. Следовательно, длительность импульса, принятого в точке B, будет равна

$$\tau_2=\tau_1+\Delta\tau=\tau_1+\frac{d}{v}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

Интересно заметить, что при любом другом расположении точек испускания и приема звуковых импульсов разница в их длительности будет еще больше (убедитесь в этом самостоятельно).

Б. И. Клячин

Ф1162. *Под водой на глубине h находится точечный источник света. Где расположено изображение этого источника для наблюдателя, смотрящего вдоль поверхности воды (рис. 1)? Показатель преломления воды n.*

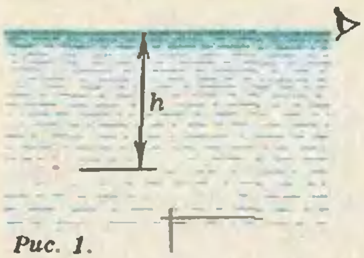


Рис. 1.

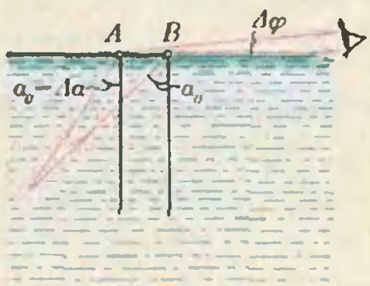


Рис. 2.

Наблюдатель, смотрящий вдоль поверхности воды, рассматривает изображение источника в лучах, образующих после преломления на границе вода — воздух очень малые углы с поверхностью воды.

Рассмотрим луч, составляющий малый угол $\Delta\varphi$ с горизонтом и ограничивающий выбранный нами пучок лучей (рис. 2). Обозначим через A точку выхода из воды этого пограничного луча, а через B — точку соприкосновения с поверхностью воды луча, испытавшего полное отражение, и найдем расстояние между этими точками:

$$AB = h(\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}(\alpha_0 - \Delta\alpha)).$$

Здесь α_0 — предельный угол полного отражения ($\sin\alpha_0 = 1/n$), а $(\alpha_0 - \Delta\alpha)$ — угол падения на поверхность воды луча, который после преломления образует с ней угол $\Delta\varphi$.

Согласно закону преломления света,

$$\frac{\sin(\alpha_0 - \Delta\alpha)}{\sin(\pi/2 - \Delta\varphi)} = \frac{1}{n},$$

или, с учетом того, что $\sin\alpha_0 = 1/n$,

$$\cos\Delta\alpha - \cos\Delta\varphi = n\cos\alpha_0 \cdot \sin\Delta\alpha.$$

Для малых углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\varphi$ справедливы соотношения:

$$\cos\Delta\alpha = 1 - 2\sin^2(\Delta\alpha/2) = 1 - (\Delta\alpha)^2/2,$$
$$\cos\Delta\varphi = 1 - (\Delta\varphi)^2/2.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для угла $\Delta\alpha$:

$$(\Delta\alpha)^2 + 2n\cos\alpha_0 \cdot \Delta\alpha - (\Delta\varphi)^2 = 0.$$

Учитывая, что $(\Delta\alpha)^2 \ll \Delta\alpha$, находим

$$\Delta\alpha = \frac{(\Delta\varphi)^2}{2n\cos\alpha_0} = \frac{(\Delta\varphi)^2}{2\sqrt{n^2-1}}.$$

Тогда

$$AB = h\frac{\sin\Delta\alpha}{\cos\alpha_0 \cdot \cos(\alpha_0 - \Delta\alpha)} \approx h\frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha_0} \ll h\operatorname{tg}\alpha_0.$$

Таким образом, для параксиальных лучей (т. е. лучей, для которых $\Delta\varphi \ll 1$) изображение источника оказывается *в точке падения луча, испытавшего полное отражение* (в точке B).

С. С. Кротов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1121 — М1140, Ф1133 — Ф1147, справились с задачами М1122 — М1126, М1128, М1134, М1136, М1137, Ф1133, Ф1134, Ф1136, Ф1146. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Д. Абдуллаев (Баку) **27, 29, 30**; *А. Акопян* (Ереван) **33, 35, 38**; *В. Барановский* (Омск) **27, 31—33, 35, 38—40**; *П. Бородин* (Киров) **38**; *Ц. Василев* (София, НРБ) **31—33, 35**; *Ю. Великина* (Днепропетровск) **31, 33**; *В. Верзаков* (Рудный) **33, 35**; *К. Волченко* (Донецк) **27, 29, 30**; *П. Данчев* (Пловдив, НРБ) **32, 35**; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) **40**; *Б. Дубров* (Минск) **27, 29—33**; *С. Зелик* (Краматорск) **27, 31, 33**; *В. Ивлев* (Джезказган) **38**; *М. Игнатьев* (Москва) **27**; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) **31, 40**; *С. Иноземцев* (Омск) **35**; *Д. Кабыш* (Москва) **38**; *В. Калошин* (Харьков) **27**; *Н. Капуткина* (Москва) **40**; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) **32**; *С. Коваценко* (Винница) **31, 33, 38—40**; *А. Козачко* (Винница) **31, 33, 38—40**; *Д. Козлов* (Ленинград) **27, 29, 30**; *А. Коршков* (Мозырь) **27, 31, 33, 40**; *А. Кротенко* (Киев) **33**; *Д. Кудрявцев* (Орджоникидзе) **33**; *Н. Лапуста* (Тернополь) **31, 33**; *С. Лесик* (Донецк) **27, 29—31**; *В. Марченко* (Минск) **33, 38**; *А. Мельник* (Гайворон) **27**; *А. Морозова* (Одесса) **32**; *Р. Мучник* (Винница) **27, 32, 33, 38, 40**; *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) **27, 32**; *О. Пихурко* (Нестеров Львовской обл.) **31—33, 40**; *А. Рыжков* (Мнск) **27, 29—33, 40**; *А. Симоненко* (Орджоникидзе) **33**; *А. Скопенко* (Москва) **27, 31—33, 38—40**; *Д. Турсунов* (Караганда) **31, 38**; *А. Федотов* (Красноярск) **27**; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **27, 31, 33, 38**; *О. Хайтметов* (Гурленский р-н Хорезмской обл.) **30**; *В. Цветков* (София, НРБ) **31—33, 35**; *В. Штотланд* (Курск) **40**; *А. Эгамов* (Гороховец) **27, 31—33, 38, 40**; *Энхтуул* (МНР) **30**; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) **33**; *И. Яковлев* (Москва) **31, 33, 38**.

Физика

Т. Атанелишвили (Тбилиси) **35, 37**; *А. Бабкин* (Киев) **35, 37**; *Р. Бадартдитов* (Куйбышев) **38, 44**; *В. Байрак* (с. Малая Александровка Херсонской обл.) **38**; *Е. Балковский* (Хабаровск) **38**; *Н. Балюнас* (Вильнюс) **35, 38, 43**; *С. Бардина* (Старый Оскол) **43, 44**; *Р. Баскаков* (Красноярск) **38, 43—45**; *А. Башкатов* (Новополоцк) **37**; *В. Белоног* (Старый Оскол) **37, 38, 41, 42**; *Д. Бережной* (Запорожье) **37**; *В. Берестецкий* (Винница) **38, 43**; *И. Блайвас* (Ростов) **31, 35, 38, 39, 43, 44**; *С. Бобровник* (Черновцы) **38, 39, 41, 43, 44**; *И. Браиловский* (Могилев) **43, 47**; *С. Бурдин* (с. Улыбино Новосибирской обл.) **37**; *С. Бычихин* (Евпатория) **35, 38, 40**; *М. Ванюшов* (Ленинград) **38, 43—45**; *В. Верзаков* (Рудный) **43, 47**; *А. Виноградов* (Кимры) **38, 43**; *М. Воронкова* (Старый Оскол) **43**; *В. Высоцкий* (Киев) **37**; *В. Гавенский* (Баку) **35, 37**; *К. Гаврильченко* (Семипалатинск) **37**; *К. Галичский* (Северодвинск) **38, 43, 44**; *А. Галяутдинов* (Харьков) **38**; *Е. Гаркушев* (Гуково) **38, 44**; *И. Гляненко* (Грозный) **43, 44**; *В. Головко* (Старый Оскол) **43, 44**; *А. Горячев* (Нарва) **43**; *А. Грибов* (Минск) **43**; *Ю. Гринфельд* (Москва) **37**; *А. Грицан* (Тула) **35, 38**; *В. Губин* (Ташкент) **43**; *В. Гундарь* (Свердловск) **35, 37—42**; *О. Гусар* (Канев) **35, 38, 43**; *В. Гусятников* (Москва) **38, 39, 43—45**; *Д. Далидович* (Москва) **39, 43**; *П. Девянин* (Москва) **42, 43**; *Б. Дейч* (Харьков) **35, 38, 39**; *С. Демба* (Старый Оскол) **35, 43—45**; *Н. Демчук* (Здолбунов) **37, 38**; *К. Демьяненко* (Киев) **35, 37**; *А. Денисов* (Ижевск) **38**; *В. Дмитриевский* (Нижний Тагил) **38, 40**; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) **35, 38, 42—45**; *Ю. Дубина* (Каменец-Подольский) **35**; *А. Дунаевский* (Москва) **43, 44**; *В. Дядечко* (Винница) **35, 37**; *А. Ефимчик* (Минск) **35**; *С. Жаров* (Ростов) **38**; *Д. Жиздюк* (Саратов) **35**; *А. Жук* (Ровно) **35, 38, 39, 42—44, 47**; *Д. Жуковский* (Брест) **38**; *В. Журавлев* (Донецк) **37**; *В. Завадский* (Минск) **35, 37**; *В. Зайцев* (Борисоглебск) **37, 38**; *В. Залевский* (Черногорск) **44**; *А. Залеский* (Харьков) **35, 38, 41**; *Э. Заморина* (Пермь) **43**; *Ф. Занин* (Старый Оскол) **37**; *Н. Заркевич* (Киев) **35**; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) **43, 44**; *К. Зуев* (Вологда) **35, 37—44**; *М. Игнатьев* (Славянск) **38**; *С. Ильиных* (Алма-Ата) **41**; *С. Казенас* (Алма-Ата) **35**; *В. Камчатный* (Киев) **43**; *С. Карапетян* (Севан) **38**; *Ал. Карпенко* (Брест) **43, 44**; *Ан. Карпенко* (Брест) **43, 44**; *С. Касаманян* (с. Аракс Октемберянского р-на) **38, 40**; *Г. Качиашвили* (с. Ванта Телавского р-на) **38**; *А. Кожевников* (Калуга) **37—44**; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) **38**; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) **37—39, 41, 43, 44**; *Д. Комисаренко* (Винница) **38, 43**; *А. Комник* (Старый Оскол) **37—39, 41—44**; *О. Кондратьев* (Брест) **35, 37—42**; *А. Коновалов* (п. Теленешты МССР) **35, 38, 43**; *И. Коновалов* (Киев) **38, 43**; *В. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) **43, 44**; *А. Коршков* (Мозырь) **35, 37—45**; *С. Котковский* (Черновцы) **38**; *А. Крайский* (Москва) **37—39, 42—45, 47**; *Н. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) **35, 37—45**; *В. Кузьменко* (Ивано-Франковск) **38, 42, 43**; *И. Кузьмин* (Москва) **38, 39, 42**; *А. Кузьмич* (п. Ивье БССР) **43, 44**; *С. Лапин* (Саратов) **38, 39, 42**; *А. Лемперт* (Ногинск) **35, 37, 39, 41—44, 47**; *М. Лысянский* (Новосибирск) **35, 38—40, 43, 44**; *Р. Маматкулов* (к-з «Москва» Сурхандарьинской обл.) **40**; *И. Мартин* (Таллинн) **43—45, 47**; *Д. Мацукевич* (Минск) **35, 37—40, 42—45**; *В. Мейтус* (Киев) **38**; *Р. Мизюк* (Ровно) **38—40, 42—44, 47**; *С. Микерин* (Баку) **38**; *М. Минина* (Шахты) **47**; *А. Михайлов* (Москва) **35, 37—40, 42**; *К. Мишачев* (Липецк) **43**; *П. Молодов* (Ломоносов) **35, 37—39**; *А. Моль* (Киев) **38**; *Э. Монхбат* (Улан-Батор, МНР) **43—45**; *А. Мороз* (Харьков) **43**; *Ю. Морозов* (Тбилиси) **38**; *С. Мурин* (Брест) **38**; *А. Настаченко* (Ростов) **37, 38, 43, 44**; *А. Натаров* (Белгород) **38**; *Е. Недув* (Одесса)

(Окончание см. на с. 42)

Биссектрисы, вписанная и вневписанные окружности треугольника

Как известно, биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — в центре вписанной окружности. Но мало кто знает, что радиус r вписанной окружности связан с высотами треугольника соотношением

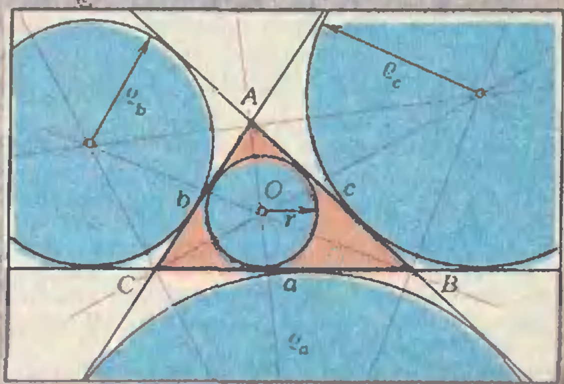
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Биссектриса угла A треугольника делит противоположную сторону на отрезки $\frac{ab}{b+c}$ и $\frac{ac}{b+c}$, которые относятся как прилежащие к ним стороны треугольника b и c. Сама же биссектриса делится точкой O пересечения биссектрис в отношении $(b+c):a$.

Длина биссектрисы, проведенной из вершины A, равна $\frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c}$, а расстояние от точки A до центра вписанной окружности равно $\sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}$, где p — полупериметр треугольника.

Нетрудно с помощью циркуля и линейки построить треугольник по его сторонам. Чуть труднее сделать это по медианам или по высотам. А построить треугольник по биссектрисам (в общем случае) невозможно.

Если провести все три биссектрисы внешних углов треугольника, то образуются три точки их пересечения, каждая из которых одинаково отстоит от прямых, на которых лежат стороны данного треугольника. Поэтому можно провести окружность с центром в такой точке, касающуюся всех сторон треугольника или их продолжений. Такие окружности называются вневписанными.



Через центр вневписанной окружности проходит и биссектриса одного из внутренних углов треугольника.

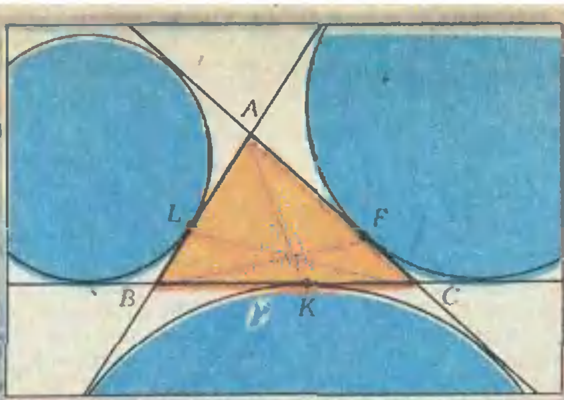
Сумма величин, обратных радиусам ρ_a, ρ_b и ρ_c вневписанных окружностей, равна обратной величине радиуса вписанной в этот треугольник окружности:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}.$$

Приведем два изящных выражения для площади треугольника через радиусы вписанной и вневписанных окружностей:

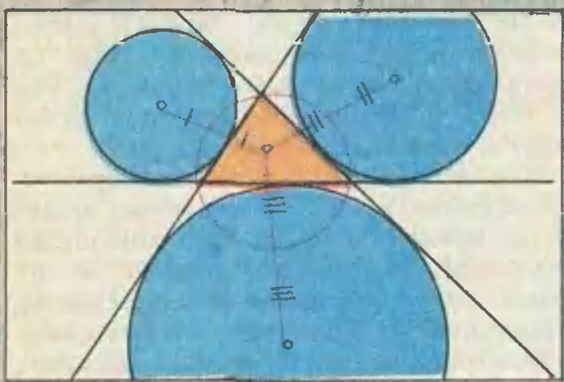
$$S=\sqrt{r\rho_a\rho_b\rho_c},$$

$$S=\frac{a\rho_b\rho_c}{\rho_b+\rho_c}.$$



Прямые в треугольнике, соединяющие его вершины с точками касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке, которая называется точкой Нагеля в честь открывшего ее немецкого математика Августа Нагеля (1821—1903).

Легко доказать, что у равнобедренного треугольника равны *медианы, высоты и биссектрисы*, выходящие из концов основания. Не на много труднее доказать, что если две высоты или две медианы треугольника равны, то треугольник — равнобедренный. Верно такое утверждение и для биссектрис, но его доказательство довольно сложно. Само это утверждение носит название «теорема Штейнера — Лемуса».



Если провести окружность через основания высот данного треугольника, то она будет проходить через середины сторон этого треугольника и через середины отрезков высот треугольника от точки их пересечения до вершин. Такая окружность называется окружностью девяти точек. Окружность девяти точек касается вписанной и всех вневписанных окружностей этого треугольника.

Любопытно, что отрезки, соединяющие центр вписанной в треугольник окружности с центрами вневписанных окружностей, делятся пополам окружностью, описанной вокруг этого треугольника.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 39)

38, 39, 41—45, 47; *Д. Омецинский* (Киев) 38, 39, 43; *А. Орловский* (Киев) 35, 38, 43, 45; *С. Павлов* (Новосибирск) 35; *А. Павлощук* (Киев) 38, 40, 41, 43, 45; *А. Падий* (Киев) 38, 40, 42, 43; *В. Панков* (Пенза) 37, 40, 43, 44; *Д. Пастиров* (Москва) 37; *Д. Пастухов* (Москва) 39—42; *Т. Петрова* (Новосибирск) 43; *Е. Пивоваров* (Ленинград) 37, 43; *С. Польшин* (Харьков) 35, 38—40; *Ф. Попеленский* (Москва) 43; *В. Портной* (Одесса) 38, 39, 41; *Е. Призант* (Одесса) 38, 43, 44; *В. Пузанов* (Донецк) 43; *А. Пушнов* (Вольск) 35, 37—41, 43, 44; *И. Пятайкин* (Москва) 38; *А. Распереза* (Брест) 35, 37—44; *Х. Рахимов* (Шават) 47; *Т. Рашник* (Киев) 35; *В. Розенблит* (Рига) 41, 43; *В. Роман* (Ровно) 35; *А. Рувинский* (Ивано-Франковск) 38, 41, 43; *С. Рубницкий* (Одесса) 43, 44; *Н. Рябова* (Харьков) 40; *Д. Самборский* (Истра) 35, 37—42; *А. Серебряков* (Москва) 37; *И. Сидора* (Черновцы) 43, 44; *В. Стахурский* (Киев) 43; *М. Субботин* (Старый Оскол) 37, 39, 43, 44; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 38, 42, 43; *Ю. Тарасюк* (Винница) 35, 37; *Н. Тарновский* (Винница) 38, 41, 43, 44; *М. Терсенов* (п. Возжаевка Амурской обл.) 43; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 35, 37; *С. Тихонов* (Воронеж) 43, 44; *С. Тозик* (Минск) 38, 43, 44; *М. Турлаков* (Фрунзе) 35, 37—44; *Ю. Уваров* (Ленинград) 35, 37—40, 42—45; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 39—44; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 37; *Н. Фендеров* (Калининград) 38; *Д. Фишер* (Одесса) 38, 39; *А. Фридлянд* (Саратов) 35, 37, 38, 43—45; *И. Химони* (Днепропетровск) 35, 37, 38, 43, 45; *С. Храпов* (Коломна) 38, 40, 43, 44; *Е. Чашечкина* (п. Черноголовка Московской обл.) 43; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 35, 37—45; *В. Чуев* (Старый Оскол) 37; *Ю. Шарлай* (Харьков) 35, 37; *О. Шведов* (Москва) 37—43, 45; *Е. Швец* (Черновцы) 37, 38, 40—44; *А. Швороб* (Барановичи) 37, 38, 40, 41; *С. Шепель* (Рыбинск) 43, 44; *С. Шинкевич (Березники)* 35, 37—45; *Ш. Шихсаидов* (п. Черноголовка Московской обл.) 44; *И. Шуляк* (Киев) 38, 43, 44; *А. Шумилин* (Запорожье) 37; *М. Эгул* (Алма-Ата) 43, 44; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) 38, 43, 44; *И. Ягольницер* (Черновцы) 37, 38, 43, 44.

Почему не летают самолеты в сильный дождь?

(Начало см. на с. 10)

Следовательно, и снизу на «жидкий» и на «воздушный» параллелепипед действуют одинаковые силы. Таким образом, наличие тонкой водяной пленки не изменяет распределения давления по вертикали, и в одном и том же сечении в потоке жидкости и в воздушном потоке давления одинаковы, т. е. $p=p_1$.

— Дальше все ясно,— перебил я приятеля.— Из условия $p=p_1$ следует, что $\varrho v^2/2=\varrho_1 v_1^2/2$, и

$$v/v_1=(\rho_1/\rho)^{1/2}.$$

Так что окончательно получаем: в условиях достаточно сильного дождя сила сопротивления, действующая на крыло, увеличивается в

$$\frac{\tau}{\tau_1}=\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^{1/4}\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{1/2} \text{ раз.}$$

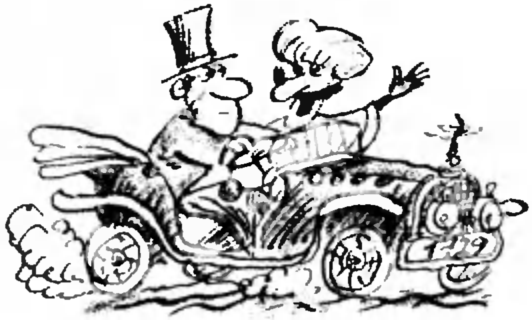
Приятный голос из динамика сообщил, что самолет совершил посадку. Напомнил, что не стоит забывать свои вещи в самолете. Я забрал исписанные приятелем листочки...

Вернувшись домой, я посмотрел в справочнике нужные значения плотностей и коэффициентов динамической вязкости для воздуха и воды, подставил в формулу и получил $\tau/\tau_1\approx1{,}5$. Таким образом, «всепогодный» самолет должен обладать пятидесятипроцентным запасом тяги по сравнению с обычным самолетом. Вот почему не летают самолеты, когда идет сильный дождь.

Такая оценка получилась в предположении, что на обтекаемом воздухом крыле имеется пристеночный пограничный слой, состоящий из воды. Сразу же возникает каверзный вопрос: какова же должна быть тяга двигателей для движения самолета в сплошном потоке воды? Читатель, внимательно изучивший статью, решит эту задачу самостоятельно. Ответ сообщаю: для «превращения» самолета в подводную лодку необходимо увеличение мощности его двигателей в

$$\frac{\tau}{\tau_1}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^{1/2}\approx230 \text{ раз.}$$

Задачи



1. Как-то раз знаменитый индийский математик Рамануджан ехал в автомобиле со своим английским другом математиком Харди. «Вы говорите, что не бывает не замечательных чисел,— сказал Харди.— А вот номер моей машины, 1729,— ничем не замечательное число.» «Что Вы,— воскликнул Рамануджан,— это же наименьшее число, которое представляется в виде суммы кубов двух натуральных чисел двумя различными способами!» Найдите оба эти представления.

2. На лесной поляне собрались друзья: Попугай, Удав, Слоненок, Теленок, Котенок, Мартышка и Верблюжонок. Попугай начал всех мерить. Оказалось, что Слоненок длиннее Теленка на 3 Попугая, Верблюжонок длиннее Мартышки тоже на 3 Попугая, Теленок длиннее Попугая на 7 Попугаев, Верблюжонок длиннее Котенка на 6 Попугаев, а все они укладываются в точности на Удаве, длина которого 38 Попугаев. Выразите длины друзей в Попугаях.

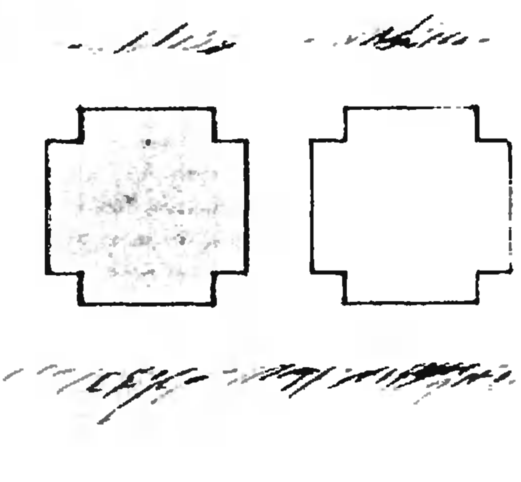
3. Проверьте, что

$$\frac{19^3-70^3}{19^3+89^3}=\frac{19-70}{19+89}.$$

И вообще $\frac{a^3-b^3}{a^3+c^3}=\frac{a-b}{a+c}$, если $c=a+b$.

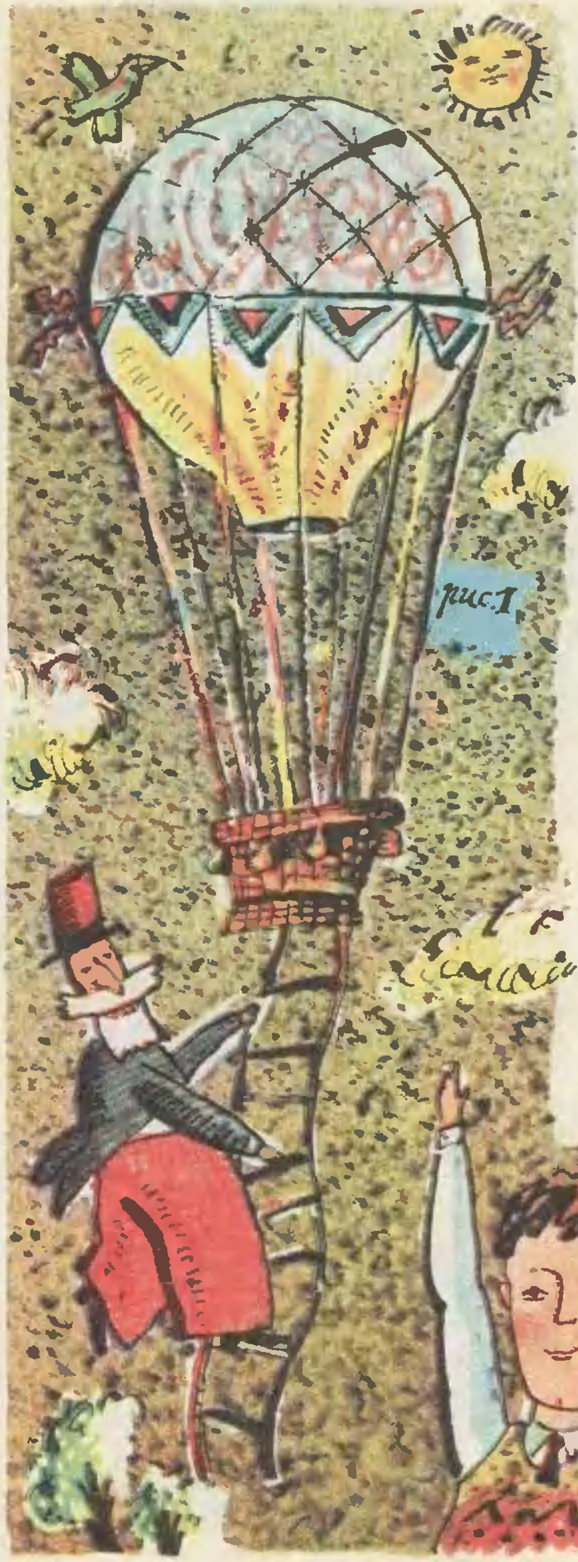
4. Когда Петя разбил свою копилку, в ней оказалось 16 медных монет. Он разложил их на 4 кучки по 4 монеты так, чтобы денег в каждой кучке было поровну. Тут он заметил, что наборы монет во всех кучках разные. Сколько денег было в копилке?

5. Разрежьте одинаковым образом каждую из двух одинаковых фигур (см. рисунок) на 4 части так, чтобы из полученных восьми кусков можно было сложить одну подобную им фигуру вдвое большей площади.



Эти задачи нам предложили: А. П. Савин, М. Б. Улановский, ученик 10 класса школы № 149 г. Харькова С. А. Ляшенко, А. И. Демидов, Л. П. Мочалов.

ВОПРОСЫ, ВОПРОСЫ...



«Предлагаемая книга представляет собою как бы пространную физическую «викторину», которая должна помочь читателю установить, насколько в действительности овладел он основами физики. Однако это никак не вопросник для экзамена; бо́льшая часть вопросов принадлежит к таким, которые едва ли когда-нибудь предлагались на экзаменах. Напротив, книга рассматривает материал, обычно проскальзывающий мимо статей экзаменационного опроса, хотя вопросы нашей «викторины» тесно связаны с элементарным курсом физики. При кажущейся простоте вопросы кроют в себе зачастую неожиданность для читателя. Иные представляются до того простыми, что у каждого готов на них ответ, который, однако, часто оказывается ошибочным.»

Так начинается книга известного популяризатора физики и математики, механики и астрономии Я. И. Перельмана «Знаете ли вы физику?», увидевшая свет в 1934 году.

Сейчас книга готовится к выходу в Библиотечке «Квант». А пока — несколько вопросов из этой книги.

1. На необитаемом острове. Вот один из вопросов знаменитой Эдисоновой викторины:

«Если бы вас высадили на один из тропических островов Тихого океана

без всяких орудий, как сдвинули бы вы там с места трехтонный груз — *скалу*, *имеющую* 100 футов в горизонтальном протяжении и 15 футов в вертикальном?»

2. На воздушном шаре. С воздушного шара, неподвижно держащегося в воздухе, свободно свешивается лестница (рис. 1). По ней начал взбираться человек.

Куда при этом подвинется шар: вверх или вниз?

3. Пластинка на дне сосуда с жидкостью. Если ко дну стеклянного сосуда с водой приложить вплотную *деревянную пластинку*, она всплывет. Если ко дну такого же сосуда с ртутью приложить стеклянную пластинку, она не всплывет. Между тем известно, что плавучесть стекла в ртути (разность удельных весов ртути и стекла) гораздо больше, чем дерева в воде.

Почему же деревянная пластинка в воде всплывает, а стеклянная в ртути не всплывает?

4. Задача Колладона. Следующий вопрос был сто лет назад предложен известным физиком Колладоном учащимся *так называемой* Центральной школы (инженерной академии) в Париже:

«Судно переместилось вверх по течению реки, поднявшись при этом на 170 м (от Марселя до Лиона). При вычислении работы, затраченной на это передвижение, надо ли, помимо сопротивления движущейся воды, принять в расчет также и произведение веса судна на 170 м?»

5. Вода в опрокинутом стакане. Общеизвестен опыт с листком бумаги, который не отпадает от краев *опрокинутого* стакана с водой (рис. 2). Он описывается во многих начальных учебниках и часто фигурирует в *популярных книгах*. Объяснение обычно дается такое: извне, снизу на бумажку давит воздух с силой одной атмосферы; изнутри же, сверху напирает только вода с силою во много раз меньшею (во столько раз, во сколько 10-метровый водяной столб, соответствующий атмосферному давлению, выше стакана); избыток давления и прижимает бумажку к краям стакана.


рис. 2

Если такое объяснение верно, то бумажка должна придавливаться к стакану с силою почти целой атмосферы (0,99 атм). При диаметре отверстия стакана 7 см на бумажку должна действовать сила почти в 400 Н. Известно, однако, что для отрывания бумажного листка в подобном опыте не требуется такая сила, а достаточно самого незначительного усилия. Пластинка же металлическая или стеклянная массой в несколько десятков граммов вовсе не удерживается у краев стакана — она отпадает под действием тяжести. Очевидно, обычное объяснение опыта несостоятельно.

Каково же правильное объяснение?

6. Сифон в пустоте. Может ли сифон действовать в пустоте?

7. Нагревание плотничьего уровня. Длина пузырька в трубке плотничьего уровня меняется при колебаниях температуры. Когда же пузырек больше: в теплую или в холодную погоду?

8. Замерзание воды в трубах. В трубах подземных частей зданий вода часто замерзает не в мороз, а в оттепель. Чем это объяснить?

9. Почему снег белый. Почему снег белый, хотя составлен из прозрачных ледяных кристалликов?

10. Радуга. Некто утверждает, что в полдень 22 июня он видел радугу на небе. Возможно ли это?

11. Свеча в закрытой банке. Вот заимствованное из детского (иностранного) журнала описание опыта, цель которого — продемонстрировать атмосферное давление:

«Горящий огарок свечи укрепляют на дне стеклянной банки и, когда пламя погорит некоторое время, накрывают банку крышкой, проложив между их краями увлажненное резиновое кольцо. Пламя тускнеет и вскоре гаснет (рис. 3). Попробуйте тогда оторвать крышку от банки — это удастся вам лишь при значительном усилии.

Причину явления легко понять. Пламя потребляет кислород, запас которого в герметически закрытой банке ограничен. Когда он расходуется весь, пламя гаснет. Оставшаяся часть воздуха, заняв больший объем, разрежается и давит слабее. Избыток наружного давления и прижимает так сильно крышку к банке».

Находите ли вы это объяснение правильным?

20 лет спустя

(к годовщине первой лунной экспедиции)

Большинство наших читателей родились тогда, когда полеты на Луну стали уже историей, и им, наверное, неправдоподобным покажется случай, описанный полтора века назад в газете «Московские губернские ведомости»: за «крамольные речи о полете на Луну» было решено мещанина Никифора Никитина сослать в... поселение Байконур!

А вот другой, более свежий, но тоже любопытный факт: всего лишь за два года до запуска первого искусственного спутника Земли тогдашний президент Академии наук СССР попросил нескольких ученых высказать соображения о возможности использования ИСЗ. «Фантастикой не увлекаюсь», «Предполагаю, что выход в космос произойдет не ранее 2000 года», «Не представляю, какое практическое значение могут иметь ИСЗ» — таковы были ответы ученых.

Жизнь, как это нередко бывает, не только опровергла сомнения скептиков, но и опередила надежды оптимистов: за первым спутником всего лишь через три с половиной года в космос отправился Юрий Гагарин, еще через восемь лет американские астронавты высадились на Луне.

Вот лишь некоторые, важнейшие, вехи на пути осуществления лунной экспедиции:

Название аппарата	Дата запуска	Основные результаты
«Луна-1» (СССР)	2 янв. 1959 г.	Первая станция, запущенная в район Луны. Пролетев в 5000 км от нее, вышла на околосолнечную орбиту.
«Луна-2»	12 сент. 1959 г.	Первый космический аппарат, достигший Луны.
«Луна-3»	4 окт. 1959 г.	Получены первые изображения обратной стороны Луны.
«Рейнджер-7» (США)	28 июля 1964 г.	Переданы изображения Луны с высоким разрешением.
«Луна-9»	31 янв. 1966 г.	Первая мягкая посадка на Луну.
«Луна-10»	31 марта 1966 г.	Первый искусственный спутник Луны.
«Сервейер-5» (США)	8 сент. 1967 г.	Впервые выполнен непосредственный химический анализ лунного грунта.
«Зонд-5» (СССР)	15 сент. 1968 г.	Первое возвращение аппарата на Землю после облета Луны (на борту имелись живые существа — черепахи).
«Аполлон-8» (США)	21 дек. 1968 г.	Первый пилотируемый полет в сторону Луны (облет Луны).

16 июля 1969 года начался решающий штурм. В этот день гигантская ракета-носитель «Сатурн-5» обеспечила старт Лунной одиссеи. Экипажем «Аполлона-11» командовал Н. Армстронг, пилотом основного блока был М. Коллинз, пилотом лунной кабины (у нее было имя «Орел») — Э. Олдрин. «По сценарию» Армстронг и Олдрин должны были высадиться на Луне, а Коллинзу предстояло ожидать своих товарищей на окололунной орбите.

Почти четверо суток «добирались» астронавты до окрестностей Луны.

...19 июля в 16.00 по вашингтонскому времени в Центре управления полетом (г. Хьюстон, США) руководитель полета принял решение начинать посадку на Луну. В это время ни он, ни сами космонавты еще не догадывались, сколь драматичными станут следующие четверть часа. Первым отказало радио — оно внезапно замолкло на 51 секунду. Чуть позже диспетчеры обнаружили новую неполадку — в компьютере «Орла». Ошибался ли компьютер или он получал неверную информацию?

В 16.07 уже Армстронг заметил что-то неладное: кратеры в иллюминаторе появлялись с запозданием на 2—3 секунды против положенного. Тем не менее, Центр управления решил полет продолжать.

Еще через минуту, когда Олдрин ввел данные посадочного радиолокатора в компьютер, «началась чертовщина»: компьютер из-за перегрузки не принимал новых входных данных.

Еще через 2 минуты раздался второй сигнал тревоги. Астронавты принялись анализировать сигналы, но их успокоили и разрешили продолжать посадку.

До прилунения по программе оставалось менее четырех минут, когда руководитель полета, в последний раз опросив диспетчеров, скомандовал: «Орел, идите на посадку». «Вас понял,— спокойно ответил Олдрин.— Идем на посадку. Высота 1000 метров». За последнюю минуту компьютер еще трижды подавал тревожные сигналы.

«Орел» быстро снижался. Олдрин фиксировал высоту и скорость снижения. На высоте примерно 125 метров спуск внезапно замедлился — Армстронг наконец-то разглядел поверхность под кабиной, и то, что он увидел, испугало даже его (а ведь он был бывалым летчиком-испытателем, и его хладнокровие было хорошо известно всем): «Орел» спускался не на ровную поверхность, как было заранее предусмотрено, а на дно кратера, усеянное огромными валунами. Снизив скорость, Армстронг повел кабину вперед, выискивая площадку для посадки. Время шло, но ничего подходящего не попадалось.

Когда до поверхности оставалось метров тридцать, появилось новое препятствие: из-за сильной струи газа от работающего двигателя поднялась лунная пыль. В отличие от земной она не оседала. Казалось, что вокруг плотный движущийся туман.

«60 секунд»,— предупредила Земля, имея в виду запас топлива (предельный минимум — 20 секунд). «Давай, давай!» — подбадривал товарища Олдрин.

«30 секунд». До принятия команды на прекращение спуска оставалось 10 секунд. И тут «Орел» своими щупами коснулся лунной поверхности.

«Есть лунный контакт!» — закричал Олдрин.

«Хьюстон, говорит База Спокойствия. «Орел» прилунился!» — взволнованно сообщил Армстронг...

В следующие несколько лет на Луне побывали еще 5 экспедиций, а одна попытка чуть не окончилась трагически.

СССР продолжал исследовать Луну с помощью беспилотных аппаратов. В 1970 году «Луна-16», а позже «Луна-20» и «Луна-24» доставили лунный грунт на Землю. Поработали на Луне и два автоматических самоходных аппарата — «Луноход-1» и «Луноход-2».

За прошедшие тридцать с небольшим лет космической эры «социальный статус» космических полетов заметно изменился. Сегодня задачи, решаемые в этих полетах, широки и разнообразны — вопросы фундаментальной науки и новые технологии, исследование космических объектов и изучение конкретных физических и биологических явлений, и чисто «прикладные» исследования...

Как с этих позиций можно оценить первую лунную экспедицию? С таким вопросом редакция обратилась к летчику-космонавту СССР, доктору технических наук К. П. Феоктистову. Сразу скажем, что ответ К. П. был для нас несколько неожиданным. Тем более, как нам кажется, запись этой беседы будет интересна нашим читателям, ведь это — взгляд человека, имеющего непосредственное отношение к становлению практической космонавтики, в каком-то смысле — размышления человека над своим делом.

Беседа с К. П. Феоктистовым

— Константин Петрович, с того дня, когда человек впервые ступил на Луну, прошло 20 лет. Для большинства наших читателей этот день — далекая история, это было еще «до них», и вряд ли они могут представить себе, каковы были тогдашние ощущения людей на Земле. Как бы вы их выразили?

— 20 июля 1969 года мы поглядывали на Луну с необычными, новыми ощущениями. Вроде бы как всегда висит в небе то ли изображение, то ли действительно небесное тело. Но сейчас там ходят люди — Армстронг и Олдрин... Как странно — мы здесь, а они — там, в этой золотистой сверкающей стране, на фантастическом от нас расстоянии в 400 000 километров! Вот уж именно момент самовыявления человечества. Ну, а американцев, естественно, в особенности.

Самовосприятие людей как индивидуальностей (и верующих, и атеистов) одинаково стимулирует их к поиску нового, к расширению сферы понимания, действий и жизни. Правда, чаще это проявляется в чисто «геометрическом» смысле. Тут обычное, психологически понятное, логически не убедительное представление: раздвигая границы достижимого мира, мы получаем возможность узнать больше о мире и, может быть, что-то новое о своем месте в нем и о самих себе. Для большинства это представление и было движущей силой Лунного проекта. И событие 20 июля 1969 года воспринималось, по словам Армстронга, как «огромный скачок для человечества».

Впечатляющий размах и впечатляющий результат. Полный успех.

Понятна и естественна тогдашняя эйфория разработчиков проекта и, наверное, большинства американцев: «Мы на Луне!.. Это мы на Луне, а не эти вечно отстающие, прозябающие в своих догмах и в своих административно-иерархических структурах русские... Естественное положение в космических исследованиях восстановлено (и наш престиж тоже!)... То, что раньше все мы воспринимали как некоторую абстракцию, некоторую красочную и неизменную деталь на небе, оказалось тоже миром, по которому можно ходить, ездить, его можно

Я не припоминаю каких-либо особых чувств, которые испытывал в этот момент, кроме того, что старался быть осторожным, хотел убедиться, что ступить на эту поверхность безопасно...

Нейл Армстронг

потрогать... Это историческое достижение. И оно наше!»

Эмоционально для всех это всемирное шоу, конечно, значило много: чувствовать себя соучастником этого необыкновенного путешествия и приключения, ощутить Луну под своими ногами...

Тут и еще раз можно поздравить и американцев, и всех нас с годовщиной прекрасного достижения. Да, конечно. Но...

— *Но?*

— Но есть и что-то сомнительное, какое-то неудовлетворение. Высадка Н. Армстронга и Э. Олдрина на Луну явилась началом реализации Лунного проекта. С 1969 по 1972 год американцы доставили на Луну 6 экспедиций. Что следует зачислить в плюс Лунного проекта? 12 человек, побывавших на Луне, в целом, все вместе, прошли и проехали по ее поверхности около 100 километров. Около 400 килограммов лунных камней было доставлено на Землю. Но сами по себе эти камни никому (кроме, может быть, селенологов и геохимиков) не дали принципиально новой и ценной информации.

Может быть, была получена какая-то другая существенная информация? Вроде бы нет.

Положительные эмоции и престиж США — да, конечно. Но «25 миллиардов за престиж» — именно во столько обошелся США первый полет астронавтов на Луну — звучит немного смешно. И печально. Ведь в убыток можно списать и те космические программы, которые можно было осуществить на эти громадные средства...

— *Как же получилось, что «практичные» американцы остановили свой выбор на Луне? Кто сделал этот выбор?*

— Тут надо вернуться назад и вспомнить конец 50-х — начало 60-х годов.

1957 год — Советский Союз запустил первую межконтинентальную ракету и первый искусственный спутник Земли.

1961 год — Советский Союз осуществил первый полет человека в космос.

Почему возникло такое положение? Почему мы оказались впереди, несмотря на громадный технический и технологический потенциал США?

Дело в том, что тогдашние ракеты и космические аппараты, космические

Человеку судьбой было предначертано рано или поздно высадиться на Луне. Этот вызов стоял перед ним с тех пор, как человек впервые взглянул на Луну, и он неизбежно должен был принять его.

Эдвин Олдрин

корабли изготавливались в малом количестве экземпляров, не требовали специальной развитой промышленной базы. Лидерство определялось в значительной степени работоспособностью и «качеством мозгов». Далек от того, чтобы уверять, что наши мозги были лучше. Но, скажем, они были не хуже. А бюрократы и карьеристы к космическому делу сильно приклеиться еще не успели. И естественно, у нас не было пренебрежительного отношения к американским инженерам. А выявиться в таком деле, как выход в космос, хотелось. Сами ставили задачи. Серьезно, без шапкозакидательства работали.

Многие американцы ощущали некоторый дискомфорт и даже ущемление своего самоуважения как лидеров прогресса. Возник вопрос о восстановлении престижа нации.

Мне неизвестно, кто предложил высадку на Луну в качестве способа восстановления престижа. Один ли Джон Кеннеди или вместе с Лемом Биллингсом, своим «закадычным» приятелем, неизменным соучастником всех «затей», или кто-то другой. Похоже на Кеннеди — размах и решительность. Едва ли более существенная и более ценная научная программа могла бы в то время произвести больший эффект на самих американцев и на все человечество.

В конце концов несущественно, кто выбрал цель. С моей точки зрения в этом предприятии цель не соответствовала затратам.

Тут нет и не может быть желания принизить великолепно выполненную работу американцев. Здесь речь идет об использовании опыта, полученного в результате принятия и осуществления Лунного проекта.

— Но разве наши исследования Луны автоматическими аппаратами не были шагами на пути к осуществлению пилотируемого полета на Луну?

— Действительно, у нас тоже было достаточно желающих реализовать полет человека на Луну. И уже в 1964 году была разработана возможная схема такой экспедиции. Во многих деталях она напоминала американскую, хотя были и существенные отличия. Когда же США реализовали свою программу, было принято решение ограничиться беспилотными аппаратами...

Соблюдать равновесие было нетрудно. Встать на ноги после случайного падения тоже не составляло затруднений... Вообще ощущение притяжения на Луне приятнее, чем земное, и даже приятнее состояния невесомости.

Нейл Армстронг

Мне не хотелось бы, чтобы создалось такое впечатление, как в басне «Лиса и виноград», но сегодня я не вижу причин огорчаться, что мы не вложили больше сил и средств для того, чтобы оказаться на Луне.

— И все-таки, какое место — с точки зрения развития космической техники и технологии — занимает Лунная экспедиция?

— Работы над Лунным проектом начались еще в начале шестидесятых годов. За эти годы американцы в результате огромной и хорошо скоординированной работы создали не только корабль «Аполлон» и ракету «Сатурн-5», но и гигантскую экспериментальную базу, огневые стенды для отработки ракетных двигателей, оборудование для подготовки ракет и кораблей к запуску, средства управления полетом. Вся эта работа в целом была выдающимся техническим достижением. Но и отдельные части этой работы явились замечательным успехом. Тут оценка может носить субъективный характер. Я бы отметил следующее:

водородно-кислородный двигатель второй ступени ракеты-носителя «Сатурн-5», примерно в 1,3 раза более эффективный, чем жидкостные ракетные двигатели, работающие на кислороде и керосине или на других компонентах;

спускаемый аппарат, в котором космонавты возвращались на Землю. Достижением являлось здесь создание защиты аппарата при возвращении его в атмосферу Земли со второй космической скоростью (около 11 км/с). Эта скорость резко усложняет задачу борьбы с тепловыми потоками, идущими от высокотемпературной плазмы на корпус аппарата;

система вертикальной ракетной посадки на поверхность Луны;

система автономного сближения лунной кабины и основного блока на орбите спутника Луны (при возвращении лунная экспедиция стартовала с поверхности в лунной кабине, выходила на окололунную орбиту, сближалась с основным блоком и переходила в него);

электрохимические генераторы, работающие на водороде и кислороде;

технические средства, бортовая система управления полетом, которые стали поворотным моментом в комплексе средств управления космическими полетами. Они обеспечивали оперативную обработку информации, поступающей с кораблей, возможность оперативного анализа, разработки рекомендаций и быстрой их передачи на борт кораблей в виде радиокоманд, указаний или советов экипажу. Наверное, надо бы отметить и другие достижения (материалы, производство жидкого водорода и т. п.).

Все это, несомненно, выдающиеся результаты. И все-таки...

— И все-таки?

— Что касается Лунной программы — поезд ушел — она реализована. Но тут есть урок для будущего.

Правильно ли была выбрана космическая цель США в начале 60-х годов? Это вовремя было сделано или рано? Скажем, почему именно сегодня нам оказывается необходимым создать электрическую лампочку, открыть структуру ядра, полететь в космос, высадиться на Луну? Или осуществить революцию? Ответ, вроде бы, очевиден — «потому что именно сегодня это оказалось возможным!»

Отнюдь не всегда так. Особенно в этом случае. Особенно если учесть гигантские средства, выделенные на Лунную программу. Для меня она не только достижение, но и один из примеров неудачно или неправильно определенной цели.

Ведь проблема выбора цели нередко встает перед целыми народами. Можно вспомнить более близкий нам пример из области выбора политических целей. Например, что было целью Октябрьской революции, а что — средствами...

— А если вернуться в космос? В печати сейчас рассматривается вопрос о выделении суммы порядка 100 миллиардов долларов или рублей для осуществления совместной советско-американской экспедиции на Марс...

— Сама постановка задачи — истратить 100 миллиардов на грандиозное космическое предприятие (с согласия налогоплательщиков!) — мне не представляется абсурдной. За удовлетворение общечеловеческого любопытства или за крупную эффективную космическую программу нужно платить.

Но, принимая решение, выбирая цель, надо крепко думать!

Почему Марс? Есть ли заметные шансы найти что-то совершенно необычное и очень ценное на Марсе?

Вообще-то, может быть. Если, например, найти на Марсе живые организмы, хотя бы на уровне грибков или бактерий. Суметь привезти их живыми на Землю и установить механизм их воспроизводства. Понять, какой это механизм. Такой же, как у земных организмов, или совершенно другой? Найти ответ на вопрос о происхождении жизни на Земле — «самозарождение» или «посев»? Или найти на Марсе следы пребывания разумных существ. Чрезвычайно интересно. Но каковы шансы обнаружить на Марсе живые организмы или следы цивилизации? Боюсь, что они, мягко говоря, невелики.

Почему же Марс? Разве нет других действительно острых, интригующих вселенских тайн, которые можно было бы «раскопать» за 100 миллиардов?

Например, создать комплекс астрофизических инструментов в космосе (большие телескопы, в том числе и радиотелескопы), которые позволили бы рассмотреть центр нашей Галактики, ближайшую звезду — Солнце, заглянуть на окраины Вселенной или даже начать серьезный методический поиск сигналов других цивилизаций.

Или приступить к решению грандиозной всемирной хозяйственной задачи — к созданию сети орбитальных электростанций и соответствующих приемных наземных станций, что дало бы возможность получить экологически чистую систему энергоснабжения Земли. Для решения этой задачи пришлось бы создать действительно дешевые ракеты-носители, дешевые космические буксиры, пленочные солнечные батареи, гигантские антенны для передачи энергии на Землю в радиодиапазоне, сложное оборудование орбитальных солнечных электростанций...

Возвращаясь к сегодняшнему дню, к двадцатилетнему юбилею первой лунной экспедиции, я бы сказал следующее. Один из главных результатов осуществления программы высадки на Луну — это еще одно напоминание о том, что при выборе цели грандиозных, дорогостоящих предприятий необходимо очень тщательное взвешивание вариантов, изучение их, проработка. Чтобы наиболее удачно и не во вред себе найти правильное соотношение цель — возможности, чтобы затрачиваемые средства и усилия соответствовали результату.

* * *

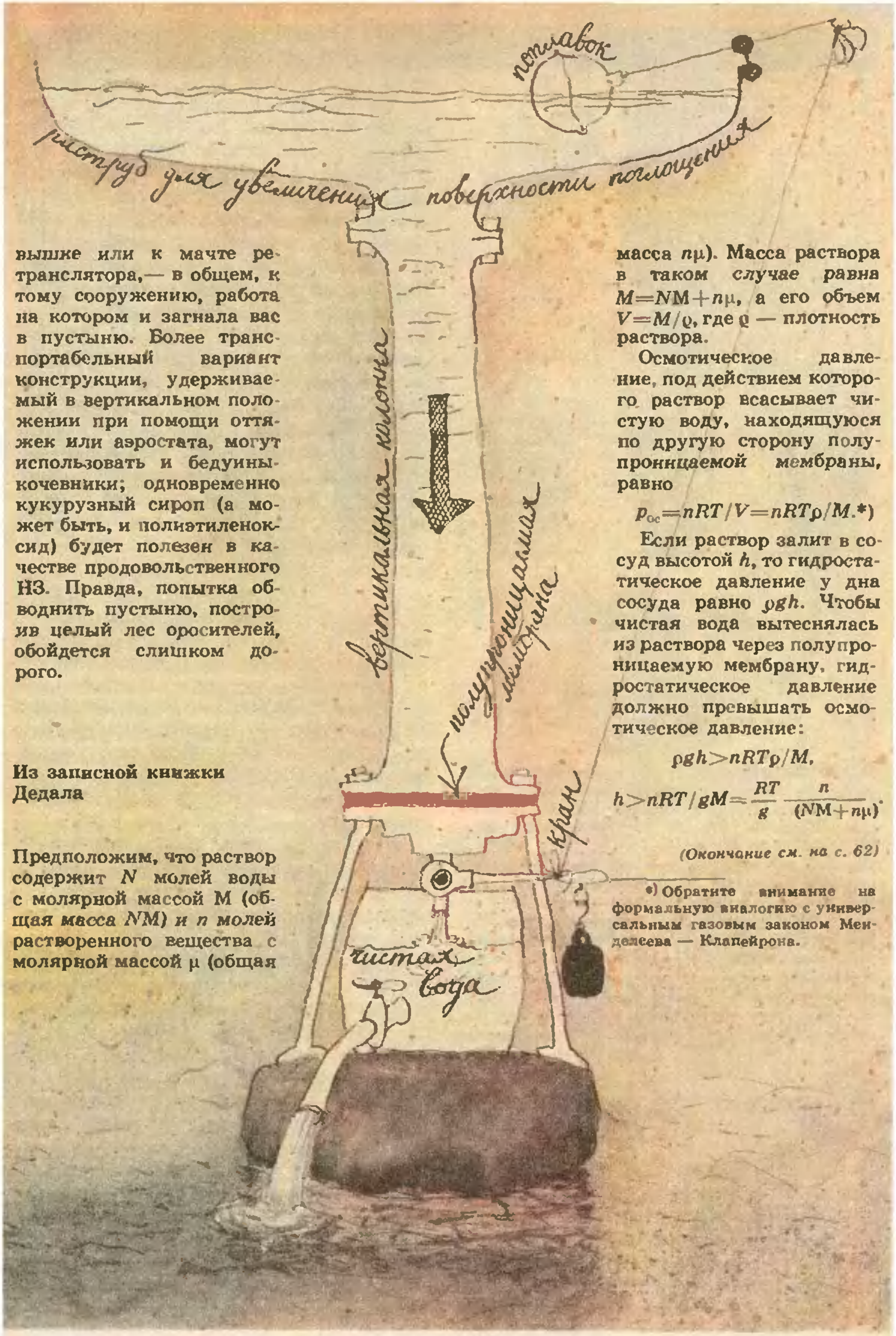
После последней экспедиции на Луну (1972 г.) было высказано предположение, что до конца нынешнего столетия человек больше не вернется туда. Похоже, так оно и будет. Когда же состоится седьмая экспедиция? Каковы будут ее задачи и кто ее организует? Может быть, отвечать на эти вопросы придется вам, дорогие читатели?...

Мы продолжаем публикацию отрывков из книги Д. Джоунса «Изобретения Дедала». Коротенький рассказ о книге и описание одного из изобретений читатель найдет в июньском номере «Кванта» (в заметке «Спасительная безликость»).

Ороситель для пустыни

Дедал предлагает новый способ выделения водяных паров из воздуха в пустыне, в основе которого лежит тот факт, что серная кислота или кукурузный сироп, оставленный в открытом сосуде, активно поглощают влагу из воздуха. Вообще, любой раствор, давление насыщенных паров над которым ниже, чем давление водяных паров в окружающем воздухе, должен поглощать влагу из воздуха. Но как выделить эту влагу из раствора? Наиболее естественно *было бы применить для* этого «обратный осмос», т. е. просто «выжимать» воду из раствора через полупроницаемую мембрану*). Дедал иачал разрабатывать водяной пресс для путешественников по пустыням, который позволяет «выжимать» воду из серной кислоты через полупроницаемую мембрану, а после спятия внешнего давления серная кислота вновь впитывает влагу из воздуха. Но затем Дедал пришел к мысли, что роль пресса вполне может играть гидростатическое давление. Высокий столб серной кислоты будет непрерывно собирать влагу из воздуха в верхней своей части, в результате диффузии вода равномерно распределяется по всему столбу и в нижней его части под действием огромного гидростатического давления выдавливается через полупроницаемую мембрану. Дедалу, правда, не по душе вся эта возня с серной кислотой — к счастью, благодаря своему большому молекулярному весу кукурузный сироп еще лучше подходит для этих целей. Если для выделения влаги из воздуха с относительной влажностью 20 % потребуется столб серной кислоты высотой 2,4 км, то при тех же условиях столб кукурузного сиропа должен иметь высоту только (!) 720 м. Из жидкостей, смешивающихся с водой, наибольшую молекулярную массу имеет, по всей видимости, жидкий полиэтиленоксид; требуемая для наших целей высота столба этой жидкости равна всего лишь 50 м. Энергию, необходимую для разделения жидкостей, в конечном счете дают сами опускающиеся вниз молекулы воды, так что весь процесс идет непрерывно и не требует вмешательства человека. В окончательном варианте установка представляет собой высокую колонну, заполненную кукурузным сиропом или полиэтиленоксидом, прикрепленную к буровой

*) Появление плевок, избирательно пропускающих воду, действительно дает возможность «выжимать» воду из раствора. Однако для полной очистки воды требуется многократно пропускать раствор через мембрану. (*Примеч. ред.*)



вышке или к мачте ретранслятора,— в общем, к тому сооружению, работа на котором и загнала вас в пустыню. Более транспортабельный вариант конструкции, удерживаемый в вертикальном положении при помощи оттяжек или аэростата, могут использовать и бедуины-кочевники; одновременно кукурузный сироп (а может быть, и полиэтиленоксид) будет полезен в качестве продовольственного НЗ. Правда, попытка обводнить пустыню, построив целый лес оросителей, обойдется слишком дорого.

Из записной книжки Дедала

Предположим, что раствор содержит N молей воды с молярной массой M (общая масса NM) и n молей растворенного вещества с молярной массой μ (общая масса $n\mu$). Масса раствора в таком случае равна $M=NM+n\mu$, а его объем $V=M/\varrho$, где ϱ — плотность раствора.

Осмотическое давление, под действием которого раствор всасывает чистую воду, находящуюся по другую сторону полупроницаемой мембраны, равно

$$p_{\text{ос}}=nRT/V=nRT\rho/M.*)$$

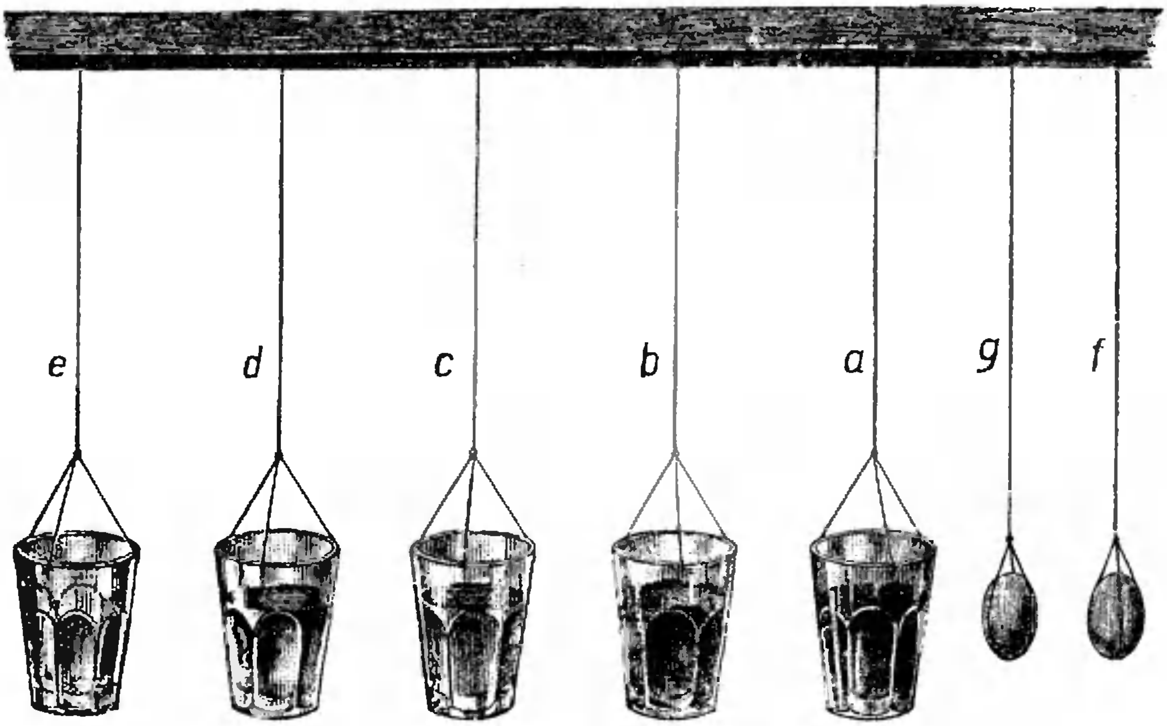
Если раствор залит в сосуд высотой h, то гидростатическое давление у дна сосуда равно ρgh. Чтобы чистая вода вытеснялась из раствора через полупроницаемую мембрану, гидростатическое давление должно превышать осмотическое давление:

$$\rho gh>nRT\rho/M,$$

$$h>nRT/gM=\frac{RT}{g}\,\frac{n}{(NM+n\mu)}.$$

(Окончание см. на с. 62)

*) Обратите внимание на формальную аналогию с универсальным газовым законом Менделеева — Клапейрона.



Лаборатория „Кванта"

Из старых опытов

Под таким заголовком уже не один раз мы публиковали статьи о занимательных и вместе с тем весьма поучительных старых опытах (см. «Квант»: 1982, № 10; 1983, № 5; 1984, № 8; 1985, № 7).

Сегодня вниманию читателей мы предлагаем отрывки из книги Дж. Перри «Вращающийся волчок», изданной на русском языке в 1935 году. Книга написана по мотивам прочитанной автором — английским профессором физики Джоном Перри — публичной лекции, содержавшей популярное изложение теории волчка и сопровождавшейся красивыми демонстрациями. Материал публикуется с небольшими редакционными сокращениями и изменениями.

Вращающийся волчок

Подумайте хорошенько — и вы признаете, что поведение обыкновенного волчка в высшей степени удивительно. Если он не вертится, то, как вы видите, он сразу опрокидывается, и я не в состоянии удержать его в равновесии на острие. Но он обладает совершенно иными свойствами при вращении: он не только не падает, а наоборот, когда я его толкаю, проявляет удивительное сопротивление и даже принимает все более и более вертикальное положение.

Стоит лишь нам пробудить в себе интерес к научному наблюдению, и мы заметим, что природа преподносит нам явления такого рода в большом числе.

Те из вас, кому приходилось быстро вращать пояс или канат, знают, что быстрое движение сообщает своего рода «одеревенелость» гибким и даже жидким телам. Вот, например, круг из совсем тонкой бумаги (рис. 1); если я привожу его в быстрое вращение, то он оказывает сопротивление силе моей руки или удару кулака, как если бы это был круг из стали. Вы слышите, как он звучит, когда я его ударяю палкой. Куда девалась его гибкость?

Вот еще кольцеобразная цепь, совсем гибкая (рис. 2). Кажется смешным, что ее можно заставить стоять, как твердый обруч, а между тем, если я сообщу ей на этом барабане быстрое вращательное движение и дам ей соскользнуть на пол, она бежит через весь стол совершенно так, как если бы это было твердое кольцо, и когда эта цепь падает на пол, то она подскакивает вверх, как игрушечный обруч.

Вода внутри стеклянного сосуда (рис. 3) находится в состоянии быстрого движения, вращаясь вместе с сосудом. Посмотрите на погруженный в воду кусок парафина A, и вы заметите, что он дрожит, если я толкну его палкой, совершенно так, как если бы он был окружен густым студнем. Видоизменим теперь этот опыт Уильяма Томсона, как предложено было профессором Фицджеральдом. Прикрепим к концу палки кружок B. Когда я ввожу кружок B в воду, вы видите, что он, хотя и не касается куска A, все-таки отталкивает его. И далее вы можете заметить, что если я быстро вращаю кружок B, он как бы притягивает кусок парафина A.

Ударом об эластичную поверхность задней стенки ящика (рис. 4) можно привести в быстрое вращательное движение небольшое количество воздуха возле круглого отверстия с передней стороны; чтобы сделать этот воздух видимым для глаза, его смешивают с дымом, и таким образом получается кольцо дыма. Это кольцо движется на значительное расстояние, не изменяясь, почти как твердое тело, и я не знаю наверное, нельзя ли было бы послать большое кольцо отравленного дыма так далеко, чтобы оно истребило или привело в оцепенение армию, отстоящую на несколько километров. Не забывайте того, что за время существования кольца частицы воздуха, его составляющие, остаются одни и те же. Вы можете далее заметить, что два кольца дыма, выходящие из двух ящиков, оказывают замечательное действие друг на друга.

Уже из показательных вам опытов вы видите, что движение сообщает малым количествам жидкости удивительные свойства упругости, притяжения и отталкивания; что каждая из целых частей вещества оказывает сопротивление разделению на две части; что нельзя даже приблизить к дымово-

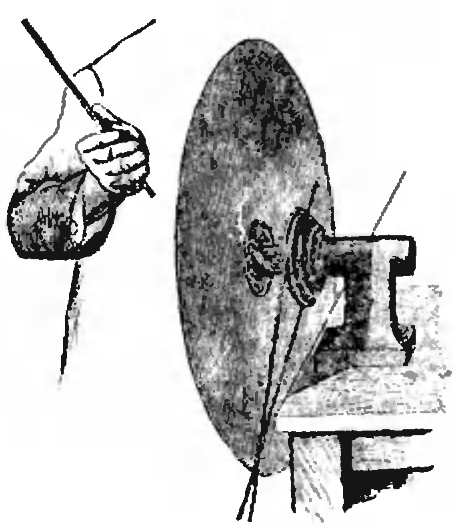


Рис. 1.

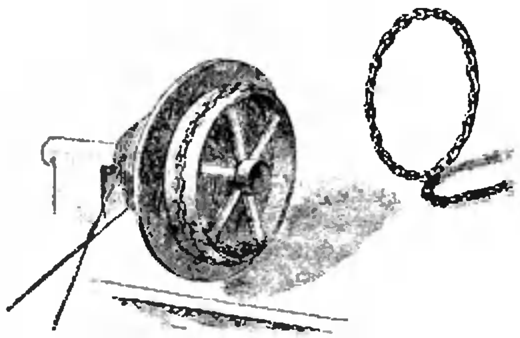


Рис. 2.

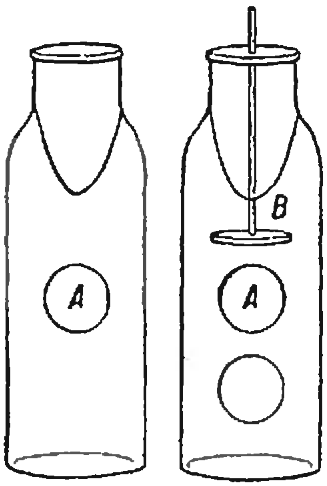


Рис. 3.

му кольцу нож и что столкновение двух колец такого рода не так уж сильно отличается от столкновения двух каучуковых колец.

* * *

Посмотрите на волчок, который лежит на плоской дощечке и который я подбрасываю в воздух (рис. 5). Вы видите, что проследить за его движением трудно, и никто не мог бы предсказать заранее, пока он не упадет, в каком положении он вернется обратно на дощечку: острым концом вперед, назад или в сторону. Но если я заверчу его и теперь подброшу в воздух, то не может быть никакого сомнения относительно того, в каком положении он вернется назад. Ось вращения остается параллельной сама себе, и я могу подбрасывать волчок вверх несколько раз подряд, не изменяя заметно его вращательного движения.

Если я подброшу вверх бисквит (рис. 6), то я не могу знать заранее, как он упадет обратно; но если я перед тем, как выпустить его из рук, приведу его во вращение, то на этот счет не остается никакого сомнения. Вот шляпа (рис. 7); я подбрасываю ее вверх и не знаю, в каком положении она упадет обратно, но если я сообщу ей вращение, то ось, вокруг которой происходит вращения, как у волчка и бисквита, остается параллельной сама себе, и вы сможете быть уверены, что в данном случае шляпа упадет на землю полями вниз.

Исследуем теперь внимательнее свойства обыкновенного волчка. Он не вращается, и вы видите, что он сразу же опрокидывается; если я ставлю его вертикально на его острие, то он оказывается совершенно неустойчивым. Но теперь обратите внимание, что когда он кружится, то он не только сохраняет свое вертикальное положение, но даже, если я его ударю и таким образом изменю его состояние, начинает кружиться в прецессионном движении, которое постепенно делается все меньше и меньше, пока волчок не приходит в свое вертикальное положение.*) Тут следует сделать прежде всего два важных замечания.

Первое замечание, которое мы делаем, состоит в том, что волчок наклоняется в первый момент не по направлению удара. Если я направляю удар к югу, то волчок наклоняется к западу, если же — к западу, то волчок наклоняется к северу. Причина этих явлений известна всем образованным людям, и закон, лежащий в основе

*) Прецессия — движение оси вращения твердого тела, при котором она описывает коническую поверхность. (*Примеч. ред.*)

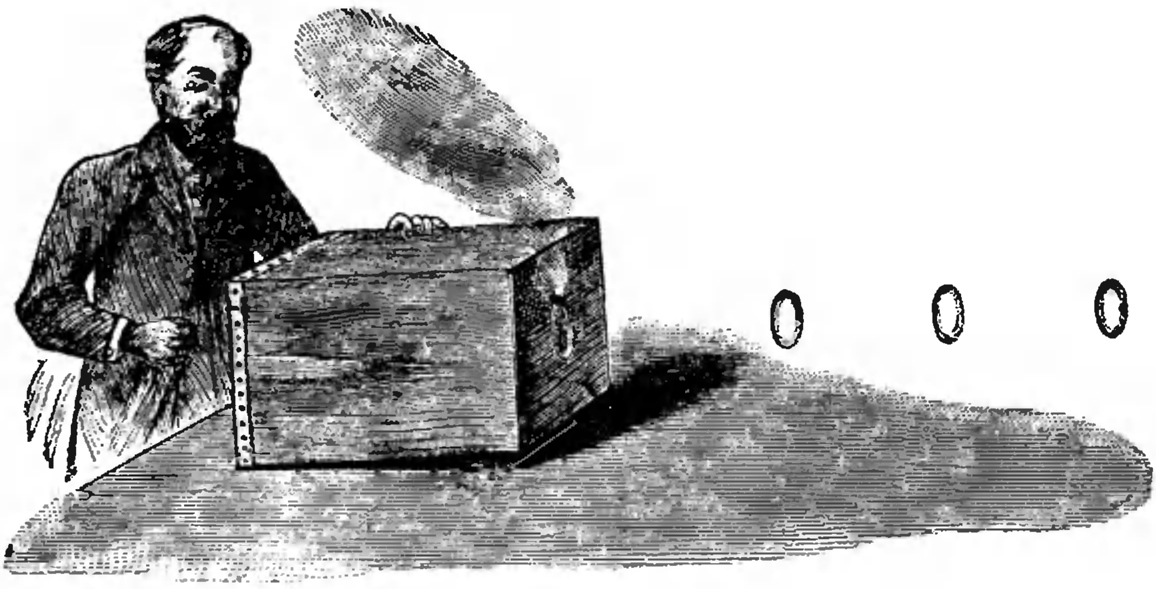


Рис. 4.

поведения волчка, во многих отношениях в высшей степени важен. Второй факт, что волчок опять достигает мало-помалу своего вертикального положения, известен каждому; но нельзя сказать того же самого о причине этого факта; однако, я думаю, что понять эту причину не представит для вас большой трудности.

* * *

У всякого тела есть три оси, вокруг которых оно может вращаться в уравновешенном состоянии, не обнаруживая тенденции раскачиваться в разные стороны, но в двух из этих трех случаев это равновесие все же неустойчивое, и есть только одна ось, вокруг которой может иметь место совершенно устойчивое и уравновешенное вращение. Кроме того, вращающееся тело, предоставленное самому себе, по истечении более или менее продолжительного времени в конце концов начинает вращаться вокруг этой оси, если только имеется трение, успокаивающее его качание.

Чтобы сделать сказанное выше наглядным, я приведу тело во вращение таким способом, который позволяет ему принять за ось вращения ту главную ось, вокруг которой вращение оказывается наиболее устойчивым. Различные тела могут быть подвешены на нити, и я могу сообщать вращение колесу, к которому прикреплена эта нить (рис. 8). Вы видите, что кружок (a) сначала вращается совершенно спокойно вокруг оси AA; но вскоре вы замечаете, как он начинает понемногу раскачиваться. Теперь качания усиливаются, и вот кружок вращается спокойно и устойчиво вокруг оси BB, так как это и есть важнейшая из главных осей.

Конус (b) тоже вращается сначала спокойно вокруг оси AA; но вот начинается качание, которое становится все сильнее и сильнее, и, наконец, конус точно так же начинает вращаться спокойно вокруг оси BB — важнейшей из трех главных его осей.

Вот еще палка (d), подвешенная к концу нити. Но, может быть, вас больше заинтересует гибкая кольцеобразная цепь (c). Вы видите, как она

Рис. 5.

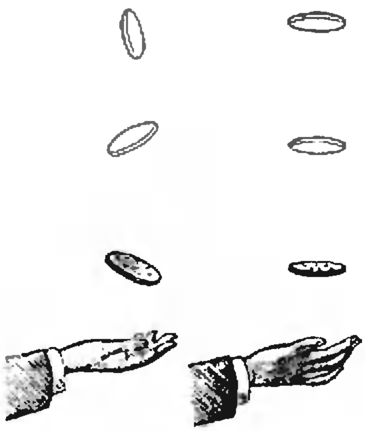


Рис. 6.

Рис. 7.

вначале висит на нити вертикально и как ее колебания кончаются тем, что она превращается в совершенно правильное кольцо, лежащее целиком в горизонтальной плоскости. Этот опыт дает также наглядный пример кажущейся твердости, которую сообщает гибкому телу быстрое движение.

Хотя стремление волчка принять вертикальное положение стало хорошо известно с тех пор, как его запустили в первый раз, я все-таки спрашиваю всех присутствующих в этой зале, знают ли они объяснение этого явления, и даже сомневаюсь, чтобы где-нибудь было много людей, которым оно известно. Всякий серьезный математик скажет вам, что объяснение, наверное, можно найти напечатанным у Раута (автора очень известного английского учебника механики) или что он во всяком случае знает в Кембридже людей, которым, без сомнения, известно это объяснение. Может быть, он думает также, что он сам когда-то знал его, но что теперь он позабыл те трудные математические доказательства, на которых он прежде изощрял свой ум. Задача эта была действительно разрешена сэром Уильямом Томсоном и профессором Блэкберном, когда они провели целый год на морском побережье, готовясь к экзамену по математике. Вероятно, тот, кто интересуется работами Томсона, придет в недоумение, узнавши, что этот ученый со своим другом проводил каникулы на морском побережье, занимаясь тем, что заставлял вертеться всевозможного рода круглые камни, собираемые им на берегу.

Теперь я покажу вам удивительное явление, над которым в то время ломал голову Томсон. Пусть эллипсоид (рис. 9) представляет собою камень, отшлифованный водой. Он лежит на столе в весьма устойчивом положении. Я привожу его в быстрое вращательное движение. Вы видите, что в течение одной или двух секунд он обнаруживает склонность вращаться вокруг оси AA, но потом начинает сильно раскачиваться; когда эти качания по истечении некоторого времени прекращаются, то он спокойно вращается вокруг оси BB, принявшей теперь вертикальное положение; но затем снова начинается ряд быстро усиливающихся качаний; когда же они прекращаются, вы замечаете, что эллипсоид окончательно приходит в состояние устойчивого вращения, становясь вертикально на самую длинную из своих осей — CC. Для всякого,

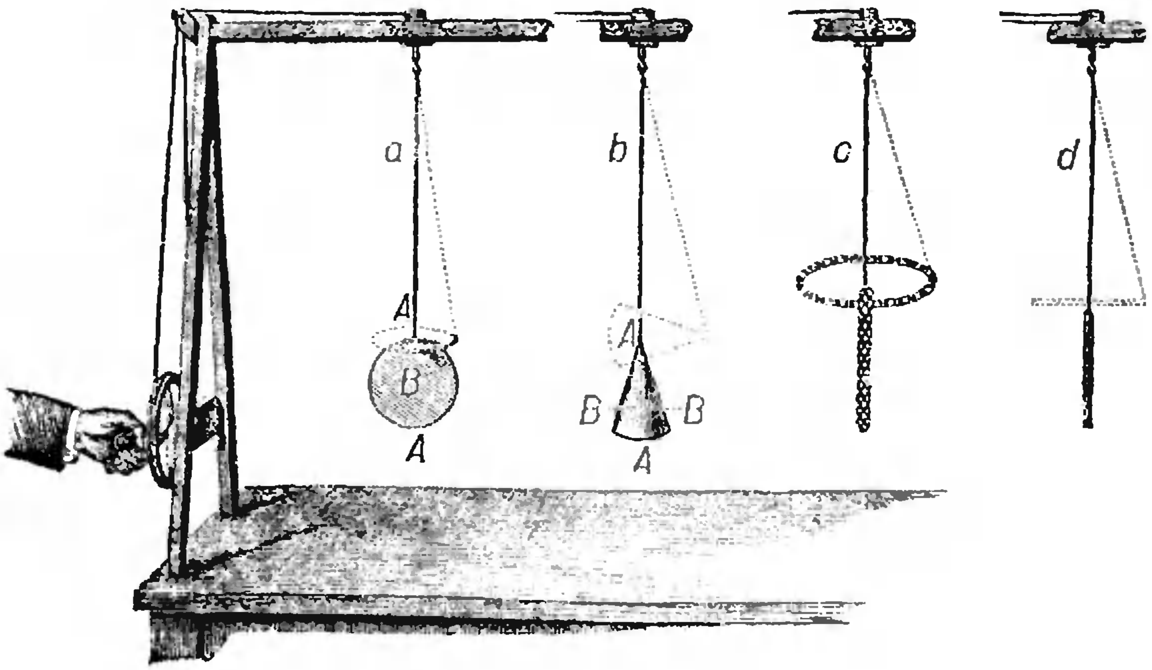


Рис. 8.

кто думает, что тело должно вращаться именно в таком направлении, в каком я его завертел с самого начала, это явление покажется необыкновенным. А между тем вы легко убедитесь, что почти всякий округленный камень, будучи приведен во вращение, подымается таким способом вертикально вдоль самой длинной оси, если только вращение достаточно быстро; совершенно таким же образом и вертящийся волчок стремится подняться как можно больше.

* * *

Я подвесил здесь несколько стаканов (см. заставку к статье): один (a), наполненный песком, другой (b) — сиропом, третий (c) — маслом, четвертый (d) — водой, а пятый (e) пустой. Взгляните теперь: я закручиваю проволоки, на которых подвешены стаканы, и затем предоставляю их самим себе — начинается колебательное движение, похожее на качание маятника карманных часов. Заметьте теперь, что стакан с водой движется очень быстро и продолжительность колебания почти одинакова для этого стакана и для пустого, т. е. вода, по-видимому, не движется вместе со стаканом. Вы замечаете также, что колебания этого стакана продолжаются в течение значительного промежутка времени.

Наоборот, стакан, наполненный песком, колеблется медленно; в этом случае песок и стакан вместе представляют как бы твердое тело, и каждое колебание длится долго.

У стаканов, наполненных маслом и сиропом, периоды колебания более продолжительны, чем у стакана с водой или у пустого, но более коротки, чем это имело бы место, если бы колеблющиеся тела были совершенно твердыми, так как масло или сироп только частично участвуют в движении. Но раз жидкость только частично участвует в колебаниях, появляются силы трения внутри самой жидкости, которые приводят к тому, что колебания затухают быстрее, чем при пустом или наполненном песком стакане.

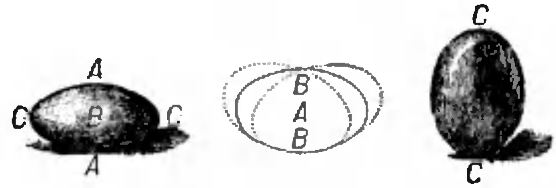


Рис. 9.

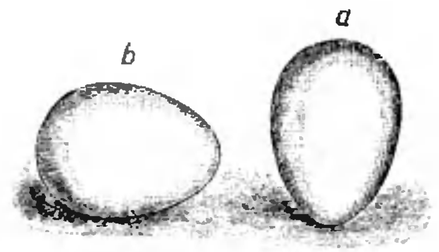


Рис. 10.

Вареное яйцо (g) и невареное (f), которые одинаковым образом подвешены на проволоке, обнаружат ту же самую разницу в свойствах колебательного движения, как и два тела, из которых одно внутри твердое, а другое жидкое; вы видите, насколько колебания вареного яйца медленнее, чем невареного.

Даже здесь, на этом столе можно легко обнаружить разницу между вареным и невареным яйцом. Если закрутить оба яйца, то вы видите, что невареное яйцо останавливается гораздо раньше, чем вареное, так как первое раньше приходит в состояние покоя вследствие внутреннего трения.

Следите теперь внимательно и уясните себе вполне отчетливо следующий весьма убедительный признак, по которому можно узнать, сварено яйцо или нет. Я закручиваю яйцо или вращаю его вокруг вертикальной оси, а затем придерживаю его пальцем только на одно мгновение, как раз в течение такого промежутка времени, чтобы остановить движение скорлупы. Вы видите, что вареное яйцо совсем прекратило свое движение, между тем как у невареного остановилось только движение скорлупы, а жидкое содержимое не только продолжает двигаться, но даже возобновляет своим движением движение скорлупы, как только я удаляю от нее свой палец.

Теперь вы будете в состоянии усвоить себе четвертый способ, с помощью которого можно узнать, сварено ли яйцо или нет (рис. 10); этот способ легче показать перед многочисленным собранием, чем последний из изложенных.

Вот невареное яйцо (*b*). Я изо всех сил стараюсь привести его во вращение на поверхности стола, но вы видите, что я не в состоянии сообщить ему быстрое вращение; при этом не наблюдается никакого особенно замечательного явления. Наоборот, вы замечаете, что вареное яйцо (*a*) привести во вращение совсем легко, причем по причинам, теперь очень хорошо вам известным, это яйцо ведет себя так же, как и те камни, которые закручивал Томсон на взморье: оно сейчас же поднимается вдоль своей более длинной оси, доставляя приятное зрелище для нашего теперь просвещенного глаза.

* * *

Позвольте мне, друзья мои, в заключение моего доклада подчеркнуть высокое достоинство науки и указать вам на то, как важно воспользоваться каждому из вас, сообразно с его деятельностью, всякой возможностью увеличить свой запас научных знаний.

Под солнцем нет ничего столь дурного, чего не могло бы очистить и победить знание, руководимое серьезной и твердой волей; и нет ни женщины, ни мужчины, родившихся на этой земле, которым не была бы уделена способность не только усваивать знания для своего собственного усовершенствования и для своего собственного удовольствия, но также и прибавить нечто новое, хотя бы и в самой малой степени, к общему запасу научных сведений — этому лучшему богатству нашего мира.

Ороситель для пустыни

(Начало см. на с. 54)

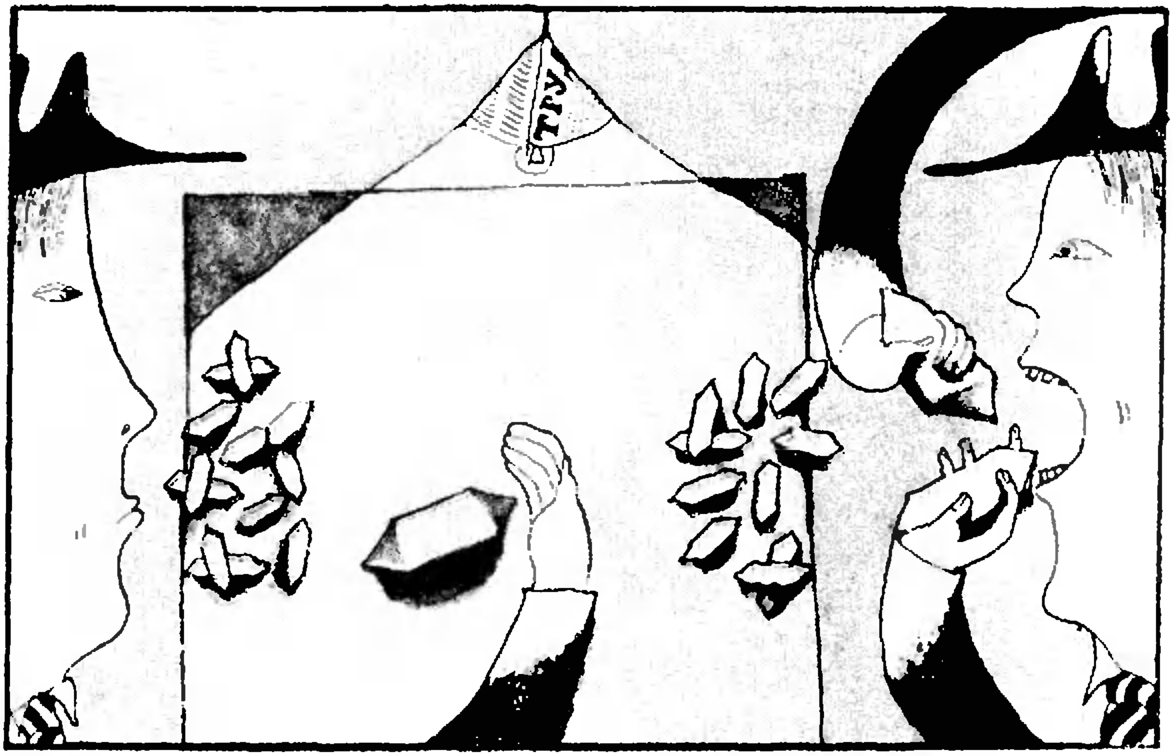
Нам необходимо, чтобы на вершине столба раствор поглощал влагу из воздуха, относительная влажность которого может составлять всего 20 %. Раствор поэтому должен быть довольно насыщенным: относительное понижение давления насыщенного пара p над раствором (в нашем случае 80 %) пропорционально его концентрации (закон Рауля). Поэтому

$$p/p_0=80/100\approx n/(N+n),$$

где p_0 — давление насыщенных паров над чистой водой. Это условие выполняется начиная с $n=4N$, откуда минимальная высота столба жидкости

$$h=\frac{RT}{g}\,\frac{4N}{(N\text{M}+4N\mu)}=\frac{4RT}{(\text{M}+4\mu)g}.$$

Примем $T=300$ К и найдем h для трех вышеназванных составов. Молекулярная масса воды равна 18, т. е. $\text{M}=0{,}018$ кг/моль. Для серной кислоты $\mu=0{,}098$ кг/моль, для сахарного сиропа $\mu=0{,}342$ кг/моль, для жидкого полиэтиленоксида $\mu=5$ кг/моль. Соответственно высота столба жидкости равна: 2430 м (серная кислота); 720 м (сахарный сироп), 50 м (полиэтиленоксид). Ясно, что выбор должен пасть на полиэтиленоксид.



Математический кружок

Этюды о полуинварианте

Л. Д. КУРЛЯНДЧИК, Д. В. ФОМИН

Если вы пожелаете совместить приятное с полезным, то запаситесь кульком конфет и поиграйте вдвоем с приятелем в такую игру. Сложите на столе две кучки конфет, в первой — 12 конфет, а во второй — 13. За ход каждый из вас может либо съесть две конфеты из одной кучки, либо переложить одну конфету из первой кучки во вторую. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Если ваши ресурсы позволят вам поиграть в эту замечательную игру достаточно долго, то вы заметите странную закономерность: *начинающий всегда проигрывает!* Впрочем, причину этого легко понять. Дело в том, что при каждом ходе разность между количеством конфет во второй и первой кучке меняется на два. Значит, остаток от деления этой разности на 4 будет изменяться строго определенным образом: 1, 3, 1, 3, 1, 3,... Мы видим, что при каждом ходе второго игрока этот остаток будет равен трем. Но игра-то прекращается, только если конфеты кончились или осталась ровно одна конфета, причем во второй кучке. Такая ситуация не может возникнуть при ходе второго игрока.

Очень возможно, что идея этого рассуждения вам известна, в частности, если ваш «читательский стаж» достаточно велик, вы могли встретить подобные рассуждения в статье «Поиск инварианта» («Квант», 1976, № 2). Помните? *Инвариант — это то, что не меняется.* А здесь как раз через каждые два хода не меняется остаток при делении на четыре разности чисел конфет в кучках. (Это соображение применимо, конечно, и при любом другом числе конфет.) Однако наша задача еще не решена. Мы доказали лишь, что второй игрок не может проиграть. Но обязательно ли он выигрывает? Обязательно ли игра кончается?

На эти конкретные вопросы ответить довольно просто (ответ, конечно же, утвердительный), но в математике часто встречаются гораздо более содержательные задачи такого рода. Об одном методе, позволяющем решать подобные задачи, мы и расскажем в этой статье.

Начнем с одной старой задачи.

З а д а ч а 1. *В прямоугольной таблице $m \times n$ записаны действительные числа. Разрешается менять знак сразу у всех чисел какой-либо строки или какого-либо столбца. Докажите, что этими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была бы неотрицательна.**)

Строки и столбцы для удобства будем называть линиями. Посмотрим, что происходит с суммой всех чисел в таблице при такой операции. Она увеличивается, если сумма чисел на изменяемой линии отрицательна, уменьшается, если эта сумма положительна, и остается неизменной, если сумма равна нулю. Значит, если в таблице есть линия с отрицательной суммой чисел, то при помощи этой операции мы увеличим сумму всех чисел в таблице.

Но может ли сумма всех чисел таблицы увеличиваться при таких операциях бесконечно много раз?

Конечно же, нет! Ведь этими операциями можно получить вообще лишь конечное число различных таблиц. Действительно, число, стоящее в данной клетке, либо совпадает с исходным числом, либо отличается от него только знаком. Поэтому количество различных таблиц заведомо не превосходит 2^{mn}, и, значит, сумма всех чисел таблицы может принимать лишь конечное число различных значений.

Рассмотрим теперь исходную таблицу. Выберем в ней линию с отрицательной суммой чисел (если таких нет, то искомая таблица найдена). Применим нашу операцию к этой линии. В полученной таблице опять найдем линию с отрицательной суммой чисел, применим нашу операцию, получим следующую таблицу и так далее. Так как на каждом шаге сумма чисел в таблице увеличивается, а эта сумма может принимать лишь конечное число значений, то либо на каком-то шаге мы получим таблицу с требуемыми свойствами, либо рано или поздно получим таблицу с максимально возможной суммой. Но она заведомо является искомой, потому что если в ней сумма чисел на какой-нибудь линии отрицательна, то, применив еще раз нашу операцию, мы получили бы таблицу с еще большей суммой чисел.

Следующая задача, на первый взгляд, не имеет никакого сходства с разобранной. Однако...

З а д а ч а 2. *На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что из этих точек можно опустить попарно непересекающиеся перпендикуляры на эти прямые так, чтобы на каждую прямую был опущен ровно один перпендикуляр.*

Опустим перпендикуляры из данных точек на данные прямые произвольно (по одному на каждую прямую). Если никакие два из них не пересекаются, то требование задачи выполнено.

В противном случае рассмотрим два пересекающихся перпендикуляра AA_1 и BB_1, опущенные из точек A и B на прямые α и β соответственно (рис. 1). Пусть P — точка их пересечения. Заменим теперь перпендикуляры AA_1 и BB_1 перпендикулярами AA_2 и BB_2, опущенными на прямые β и α соответственно. Докажем, что при этой замене сумма длин перпендикуляров уменьшится. В самом деле, $AA_2<AP+PB_1$ и $BB_2<BP+PA_1$; складывая эти неравенства, мы получаем $AA_2+BB_2<AA_1+BB_1$.

Теперь поступим так же, как в предыдущей задаче. Рассмотрим началь-

*) Это — задача М80 из «Задачника «Кванта», («Квант», 1971, № 4).

ную картинку, состоящую из n прямых и n перпендикуляров. Выберем на ней два пересекающихся перпендикуляра и применим нашу операцию: заменим эти два перпендикуляра на два других с меньшей суммой длин. В полученной картинке снова найдем два пересекающихся перпендикуляра, снова применим к ним нашу операцию и так далее. Тогда либо на каком-то шаге мы получим картинку с попарно непересекающимися перпендикулярами, либо в конце концов получим картинку с минимально возможной суммой длин перпендикуляров (так как эта сумма может принимать лишь конечное число значений; почему?). Эта картинка и является искомой: если два перпендикуляра на ней пересекаются, то, применив нашу операцию еще раз, мы получили бы картинку с еще меньшей суммой длин перпендикуляров.

Проанализируем эти два решения. Мы действовали в них по одной схеме: вводили некоторую величину (в первой задаче это сумма всех чисел таблицы, а во второй — сумма длин перпендикуляров) и операцию, в результате применения которой эта величина менялась определенным образом: в первой задаче увеличивалась, а во второй — уменьшалась. Решение основывалось на том, что введенная величина может принимать лишь конечное число различных значений. Следовательно, данная операция может быть применена лишь конечное число раз, и мы неизбежно придем к требуемой в задаче ситуации.

С этой точки зрения вторая задача труднее первой, так как в ней нам пришлось придумать не только искомую величину, за изменением которой мы должны проследить, но и саму операцию.

Кроме того, вторая задача — прекрасный пример того, как легко можно пойти по ложному следу: новые перпендикуляры AA_2 и BB_2 не пересекаются, и поэтому кажется удобным следить за количеством точек пересечения наших n перпендикуляров, которое, на первый взгляд, всегда уменьшается при описанной операции. Однако это не так (постройте соответствующий пример).

Научиться придумывать нужную пару «операция — величина» далеко не просто. Здесь требуются опыт и интуиция.

Величину, меняющуюся монотонным образом и принимающую лишь конечное число различных значений, мы и будем называть полуинвариантом.

Следующую задачу также можно отнести к разряду хорошо известных.

З а д а ч а 3. *Докажите, что любые $2n$ точек на плоскости являются концами n непересекающихся отрезков.*

Проведем n отрезков с концами в данных точках произвольным образом. Если никакие два из них не пересекаются, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим пару пересекающихся отрезков AB и CD (рис.2). В качестве искомой операции естественно рассмотреть замену пересекающихся отрезков AB и CD на непересекающиеся отрезки AC и BD.

Осталось найти полуинвариант — величину, которая при этой операции ведет себя монотонно. Так как сумма длин диагоналей AB и CD выпуклого четырехугольника $ACBD$ больше, чем

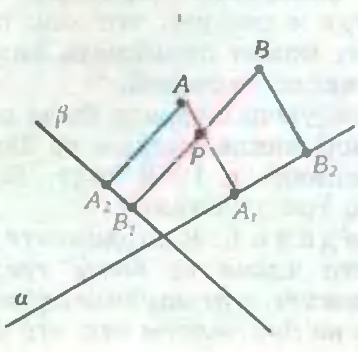


Рис. 1.

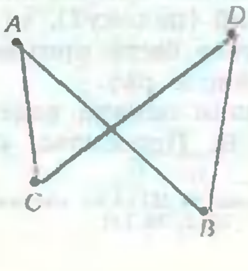


Рис. 2.

сумма длин противоположных сторон AC и BD, в качестве полуинварианта можно взять сумму длин всех n отрезков. Ясно, что эта сумма может принимать лишь конечное число значений. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, в конце концов получаем набор из n отрезков с минимальной суммой длин. Нетрудно понять, что в нем никакие два отрезка не пересекаются.

В задаче 3, по сути дела, вначале не было ни операции, ни полуинварианта. Однако после того, как мы подобрали операцию, выбор полуинварианта не представлял труда.

З а д а ч а 4. *По окружности расставлены n чисел. Если подряд стоят числа a, b, c и d и при этом $(a-d)(b-c)>0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что через несколько шагов нам не удастся произвести ни одной такой перестановки.*)*

Здесь операция замены чисел задана. Несмотря на то, что она затрагивает лишь два числа, удобно воспринимать эту операцию на всем наборе чисел, считая, что все остальные числа операция оставляет неизменными: ведь в соответствии с нашей «философией решения» необходимо подобрать некоторую величину, зависящую от всего набора чисел.

Итак, пусть подряд идущие числа a, b, c и d таковы, что $(a-d)(b-c)>0$, т. е. $ab+cd>ac+bd$. При выполнении нашей операции мы перешли от четверки a, b, c, d к четверке a, c, b, d, причем мы видим, что сумма произведений соседних чисел уменьшилась: $ab+bc+cd>ac+cb+bd$.

Теперь ясно, что полуинвариантом в этой задаче является сумма попарных произведений соседних чисел всего набора. При данной операции полуинвариант уменьшается, и так как он может принимать лишь конечное число значений (почему?), то наша операция может быть применена лишь конечное число раз.

Следующая задача взята нами из книги В. В. Прасолова «Задачи по планиметрии» (Часть 2, 21, 25).

*) Это — задача М114 из «Задачника «Кванта» (см. «Квант», 1971, № 11).

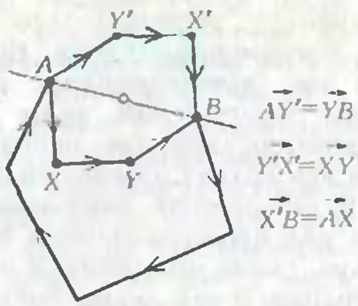


Рис. 3.

З а д а ч а 5. *С невыпуклым многоугольником производятся следующие операции. Если он лежит по одну сторону от прямой AB, где A и B — несмежные вершины многоугольника, то одна из частей, на которые контур многоугольника делится точками A и B, центрально симметрично отражается относительно середины отрезка AB. Докажите, что после нескольких таких операций многоугольник станет выпуклым.*

Итак, операция снова задана — это преобразование многоугольника. Полуинвариант, монотонно увеличивающийся при этой операции, здесь очевиден — это площадь многоугольника. Несколько менее очевидно, что площадь многоугольника в процессе наших преобразований многоугольника может принимать лишь конечное число значений. Чтобы это доказать, рассмотрим набор векторов, идущих по сторонам многоугольника. При данной операции этот набор не меняется; изменяется лишь порядок следования векторов друг за другом (рис. 3). Значит, количество многоугольников, которые можно получить из данного многоугольника при помощи описанной операции, конечно, откуда и следует, что наш полуинвариант может принимать лишь конечное число значений.

Следующая задача была предложена восьмиклассникам на Всесоюзной олимпиаде в 1979 году. Ее решили всего три участника.

З а д а ч а 6. *В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого* *парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.**)

Разобьем парламент на палаты произвольным образом. Если у каждого парламентария при этом в одной с ним палате не более одного врага, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим парламентария A, у которого в одной с ним палате не менее двух врагов. В качестве полуинварианта рассмотрим число пар врагов, находящихся в одной палате. Понятно, что перемещая парламентария A в другую палату, мы уменьшаем это число. Остается лишь произнести стандартную фразу: «Полуинвариант может принимать лишь конечное число значений».

Следующая задача предлагалась на Московской городской олимпиаде в 1964 году. Она оказалась настолько сложной, что ее не решил ни один из участников олимпиады.

Задача 7. *При дворе короля Артура собрались $2N$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $N-1$ врага. Докажите, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за Круглым Столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.*

Рассадим рыцарей за Круглым Столом произвольным образом. Если при этом получится, что никакие два врага не сидят рядом, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим рыцаря A, сидящего слева от своего врага B (рис. 4, *а*).

*) *См. также задачу М580 («Квант», 1979, № 8).*

Как и в предыдущей задаче в качестве полуинварианта (это подсказывается самим условием задачи) рассмотрим число пар врагов-соседей. Нужно придумать операцию, уменьшающую это число. Это и есть самая сложная часть решения.

Среди друзей рыцаря A обязательно найдется такой рыцарь C, что его правый сосед D — друг рыцаря B (иначе у рыцаря B врагов более $N-1$). Теперь «развернем» весь участок стола от B до C (справа от B, рис. 4, *б*) в «обратную» сторону (рис. 4, *в*). При этом рыцарь B станет соседом рыцаря D, рыцарь C — соседом рыцаря A. Остальные пары соседей не изменятся. Следовательно, полуинвариант действительно уменьшается.

В задачах на полуинвариант естественно возникает вопрос о времени, за которое заканчивается рассматриваемый процесс. Мы рекомендуем вам проанализировать с этой точки зрения все разобранные задачи. Вы убедитесь, что обычно это непростой вопрос. Мы приведем лишь один пример.

Задача 8. *На доске в ряд произвольным образом написаны N чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1. За один ход разрешается поменять знак у нескольких подряд идущих чисел. За какое наименьшее число ходов можно заведомо получить из исходного набора набор из одних единиц?*

Операция нам задана, а в качестве полуинварианта рассмотрим число пар соседей разного знака. При выполнении одной операции замены знаков этот полуинвариант может измениться не более чем на два.

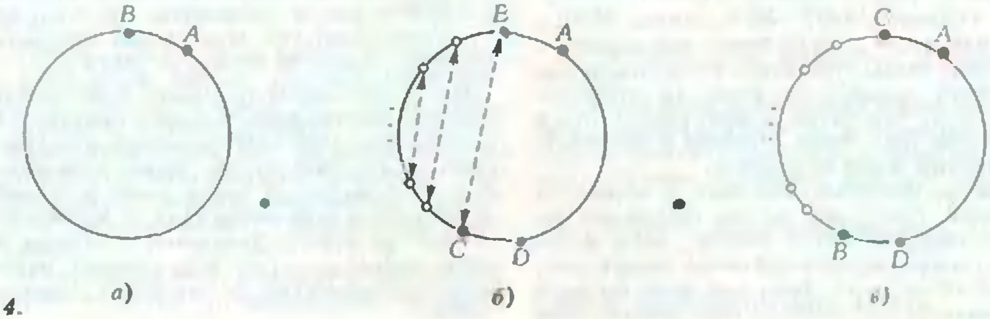


Рис. 4.

Докажем теперь, что из набора чисел -1, $+1$, -1, $+1$, ... нельзя получить набор $+1$, $+1$, $+1$, ... менее чем за $[(N+1)/2]$ шагов. (Через $[x]$ обозначена целая часть числа x.) Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного N. Пусть $N=2k$, т. е. $[(N+1)/2]=k$. Тогда вначале полуинвариант равен $2k-1$, а в конце он должен быть равен нулю. Но за $k-1$ ход добиться требуемого невозможно.

Пусть $N=2k+1$, т. е. $[(N+1)/2]=$ $=k+1$. В этом случае полуинвариант исходного набора равен $2k$, поэтому за $k-1$ ход исходный набор заведомо нельзя перевести в набор из одних единиц. Докажем, что это нельзя сделать и за k ходов. Для этого достаточно заметить, что по крайней мере один раз полуинвариант изменится не более чем на единицу (это произойдет тогда, когда операция замены знаков затронет какие-то из крайних чисел -1).

Остается показать, что за $[(N+1)/2]$ ходов из любого исходного набора можно получить набор из одних единиц. Выделим в исходном наборе все группы подряд идущих чисел -1, их не более $[(N+1)/2]$. Теперь последовательно изменим знаки у чисел этих групп.

Обращаясь в заключение к исходной задаче про конфеты, заметим, что в ней в качестве полуинварианта можно было взять величину $2a+b$, где a — число конфет в первой кучке, а b — число конфет во второй кучке.

Упражнения

1. На плоскости дано $2N$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. N из них окрашены в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что эти точки можно соединить N непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей. («Квант», 1975, № 1, задача М301.)

2. На плоскости дано N точек, некоторые из которых соединены отрезками. Известно, что из любой точки выходит не более 11 отрезков. Докажите, что эти точки можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы отрезков с одноцветными концами было не более N.

3. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку особой, если более половины соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки. («Квант», 1974, № 8, задача М277; Всесоюзная олимпиада, 1974.)

4. На каждой грани куба написано число, причем не все эти числа одинаковы. Каждое из написанных чисел заменяется на среднее арифметическое чисел, написанных на четырех соседних гранях. Могут ли через несколько таких операций на всех гранях оказаться исходные числа?

5. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны. (Ленинградская городская олимпиада, 1973.)

6. На доске написаны 10 чисел: единица и девять нулей. Разрешается выбрать любые два числа и заменить каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы после серии таких операций? (Ленинградская городская олимпиада, 1984.)

7. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги несколько клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t=1, 2, 3, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка K принимает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки K и ее соседей справа и сверху. Докажите, что через некоторое время на листе не останется черных клеток. (Всесоюзная олимпиада, 1973.)

8. По кругу стоят несколько ребят, у каждого из них несколько конфет. По сигналу ведущего каждый передает половину своих конфет стоящему справа (если число конфет у кого-нибудь нечетно, то ведущий предварительно добавляет ему одну конфету). Это повторяется много раз. Докажите, что когда-нибудь у всех ребят будет поровну конфет. (Ленинградская городская олимпиада, 1983.)

9. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов (в одной комнате может жить и несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и $(k+1)$-й,— приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. («Квант», 1984, № 6, задача М870.)

10. В библиотеке на полке в произвольном порядке расставлены N томов Британской энциклопедии. Робот-библиотекарь каждую минуту делает следующее: берет произвольный том, не стоящий на своем месте, и ставит его на место (т. е. если номер тома — k, то он ставит его k-м по счету). Докажите, что через некоторое время все тома будут стоять на своем месте. (Ленинградская городская олимпиада, 1987.)

Информация

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружка — его руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кужка может быть проверена и в ЗШ).

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо выслать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой прислать первое задание. Срок отправки заявления — *не позднее 20 сентября* (по почтовому штемпелю места отправления). В заявлении необходимо указать также некоторые сведения о себе (см. образец).

Зачисление в ЗШ производится по результатам первого задания. В тех случаях, когда число желающих учиться в ЗШ превышает возможности нашей школы, предпочтение может быть отдано школьникам из малых городов и поселков.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, но *не позднее 10 октября*.

Решение задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставив поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090 Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11. Заочная школа при НГУ.

Образец

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
класс, в котором вы учитесь в своей школе	8
отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два)	математическое (и физическое)
подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149 Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, 28 «а», кв. 5, Николаеву Игорю Ивановичу

Первое задание по математике

8 класс

1. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого одна половина артели осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; другая половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y+|x|\geqslant x^2.$$

3. Найдите две последние цифры числа $19^{89}+81^{89}$.

4. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведен отрезок, параллельный основаниям, с концами на боковых сторонах трапеции. Найдите его длину.

5. Найдите количество решений уравнения

$$x+y+z=99$$

в целых неотрицательных числах.

6. Точка движется по гипотенузе прямоугольного треугольника. При каком ее положении расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из нее на катеты, будет наименьшим?

9 класс

1. Все натуральные числа выписаны одно за другим в ряд:

$$01234567891011213...$$

Какая цифра стоит в этой последовательности на 1989-м месте?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), для которых

$$[x]+[y]=0$$

($[a]$ — целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a; например, $[-1{,}1]=-2$; $[3]=3$).

3. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$a+b=c+d;\ a^2+b^2=c^2+d^2.$$

Докажите, что

$$a^3+b^3=c^3+d^3.$$

4. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит ее на две равновеликие части. Найдите длину отрезка, высекаемого на прямой боковыми сторонами трапеции.

5. Имеется 1988 гирь массой в 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1988 г. Можно ли разложить их на две кучки равной массы? А на четыре кучки?

6. На плоскости заданы три параллельные прямые. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, три из вершин которого лежат на этих прямых.

10 класс

1. Докажите, что при любом целом n число

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

является квадратом целого числа.

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2+y^2\leqslant 4x.$$

3. Три вершины квадрата лежат на трех заданных параллельных прямых. Определите, где может находиться четвертая вершина.

4. Исследуйте функцию

$$y=x^3-2x.$$

5. Из чисел 1, 2, ..., 100 выбрано 51 различное число. Докажите, что среди них обязательно найдутся два числа, разность которых равна 2.

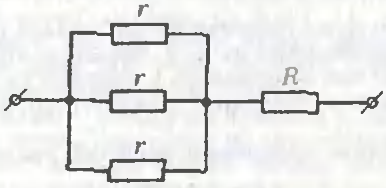


Рис. 1.

6. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине — 36°. Не используя тригонометрических функций, выразите длину его боковой стороны.

Первое задание по физике

Поскольку в задании имеются задачи различной степени сложности, для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным правильно решить одну — две задачи.

Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше).

Экспериментальная задача — одна для поступающих во все классы.

Измерьте, придумав соответствующий способ, ширину звуковой дорожки на грампластинке.

Теоретические задачи

8 класс

1. В стакан, площадь дна которого S, налита вода. Плотность воды ρ. В воду кладут кусочек льда массой m. Вода при этом не выливается, кусочек льда плавает. Найдите изменение уровня воды в стакане. Что будет с уровнем воды, когда лед растает?

2. На рисунке 1 изображен участок электрической цепи, по которому течет ток. Во сколько раз количество теплоты, выделяемое на трех резисторах сопротивлением r каждый, меньше количества теплоты, выделяемого на резисторе сопротивлением R?

3. В жидкости плотностью ρ плавает наполовину погруженный в нее стакан, высота которого H (рис. 2). В сосуд наливают еще одну жидкость, не смешивающуюся с первой. Когда ее слой на поверхности первой жидкости достигает толщины $2/3\ H$, она доходит до верхней кромки стакана. Определите плотность этой жидкости. Сечение стакана S.

4. В нагревателе объемом V вода нагревается от температуры T_0 до температуры T_1 за время τ. Какова будет температура воды на выходе из нагревателя, если ее прокачивать с объемным расходом Q? Температура воды на входе T_0.

9 класс

1. Модель ракеты взлетает вертикально вверх с ускорением a. Люди, стоящие у места старта, услышали выключение двигателя через время τ после старта. Считая скорость звука в воздухе равной c, определите скорость модели в момент выключения двигателя.

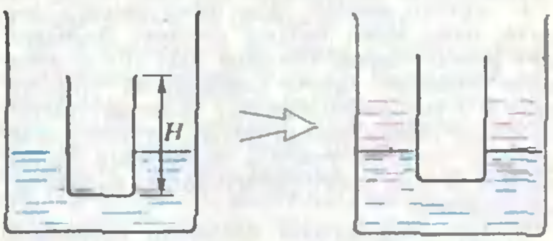


Рис. 2.

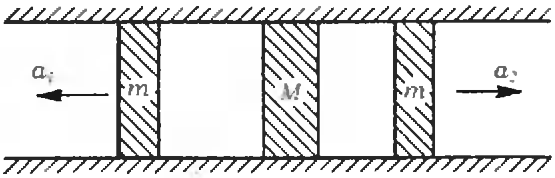


Рис. 3.

2. Решите задачу 4 для 8 класса.

3. В цилиндре находятся в покое три поршня с массами m, M и m, разделенные газом с пренебрежимо малой массой. Крайние поршни не одновременно толкнули к среднему поршню. В некоторый момент времени ускорения крайних поршней оказались равными a_1 и a_2 (рис. 3). Найдите ускорение среднего поршня в этот момент. Трением между стенками цилиндра и поршнями пренебречь.

4. Найдите силу трения, действующую на автомобиль массой m, движущийся с ускорением a по наклонной дороге. Угол между дорогой и горизонтом α. Ускорение свободного падения g. Рассмотрите случаи движения автомобиля ускоренно вверх и ускоренно вниз.

5. Тело, скользящее по наклонной плоскости, на высоте h от ее основания имело скорость v_1, когда оно двигалось вниз по плоскости, и скорость v_2, когда оно двигалось вверх после упругого удара о стенку у основания плоскости (рис. 4). Определите скорость тела сразу после удара. Ускорение свободного падения g.

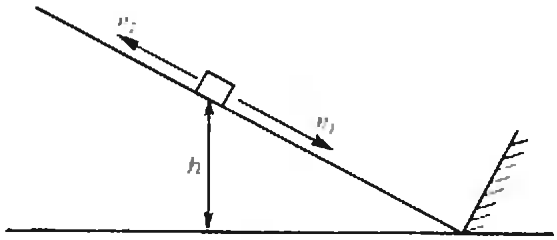


Рис. 4.

10 класс

1. Решите задачу 3 для 9 класса.

2. Два одинаковых медных диска площадью S каждый, заряженные один зарядом $+q_1$, второй зарядом $-q_2$, сложили, а потом развели на небольшое расстояние. Найдите силу электрического взаимодействия дисков.

3. Водород, находящийся при нормальных условиях, нагревали без изменения объема до температуры, в 40 раз превосходящей начальную температуру. При этом водород оказался полностью диссоциированным и ионизованным. Во сколько раз увеличилось давление?

4. Решите задачу 5 для 9 класса.

5. В токамаке дополнительный нагрев водорода плазмы производится холодными пучками быстрых атомов водорода с кинетической энергией 120 кэВ. Какую долю массы плазмы должен составлять пучок для нагрева плазмы от 8 кэВ до 10 кэВ (в физике для измерения температуры часто пользуются не градусами, а энергетическими единицами: 1 кэВ$=10^3$ эВ$=$ $=1{,}16\cdot10^7$ К)?

Нам пишут

И. А. Кушнир из Киева обращает внимание на отрезки в треугольнике, которые можно охарактеризовать одними и теми же словами (например, высоты или медианы). Такие отрезки называются одноименными. Одноименные отрезки иногда оказываются равными. Вот два примера, найденные автором.

1. Каждое из оснований высот треугольника проектируется на его стороны. Тогда одноименные отрезки, соединяющие эти проекции, равны.

Доказательство. Четырехугольник AF_1HF_2 (рис. 1) является вписанным. AH — диаметр описанной окружности. Поэтому $F_1F_2=AH/\sin A=$ $=2S/BC\ \sin\ A=S/R$.

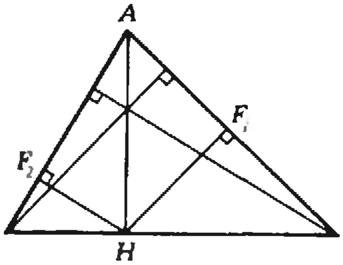


Рис. 1.

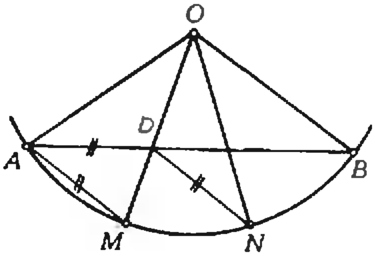


Рис. 2.

Итак, длина отрезка F_1F_2 не зависит от того, на какую сторону опущена высота.

2. Равными одноименными отрезками являются также отрезки: их концы — середина стороны треугольника и середина отрезка, концы которого — противоположная вершина треугольника и его ортоцентр.

Докажите это утверждение и попробуйте найти другие примеры равных одноименных отрезков.

Г. М. Сметанюк из г. Лозовая сообщает об интересном свойстве трисектрисы. Пусть OM и ON — трисектрисы угла AOB (см. рис. 2). Тогда $ND=DA=$ $=AM$. Попробуйте доказать эти равенства самостоятельно.

Имя замечательного американского физика Ричарда Фейнмана наверняка знакомо нашим читателям. Фейнман известен не только своими блестящими теоретическими работами по квантовой электродинамике (Нобелевская премия, 1965), теории сверхтекучести и физике элементарных частиц, но и огромным вкладом в преподавание физики и ее популяризацию. Достаточно вспомнить «Фейнмановские лекции по физике», книги «Характер физических законов», «КЭД — странная теория света и вещества» (эти две книги были выпущены издательством «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» в 1987 (вып. 62) и 1988 (вып. 66) годах).
В 1985 году в США вышла его автобиографическая книга «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!». Отдельные главы из нее были опубликованы в журналах «Наука и жизнь» (1986, № 10, 12; 1987, № 2, 8; 1988, № 8) и «Успехи физических наук» (1986, том 148, вып. 3). Мы решили продолжить начинание и сегодня предлагаем читателям отрывок из этой книги. Перевод А. В. Андриакова и М. М. Цыпина.

Счастливые числа

Как-то раз в Принстоне, сидя без дела в холле, я услышал, как какие-то математики обсуждали разложение e^x в ряд:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

Каждое следующее слагаемое получается, если умножить предыдущее на x и поделить на его номер:

$$\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{x}{5}=\frac{x^5}{5!}$$

— все очень просто.

Когда-то в детстве я был совершенно восхищен идеей таких разложений и много возился с рядами. В числе прочего я вычислял e, суммируя этот самый ряд.

Я влез в разговор и заявил, что очень легко возвести e в любую степень, используя этот ряд.

— Да ну? — тут же сказал кто-то (кажется, это был Тьюки*)). — А ну-ка, сколько будет $e^{3,3}$?

— Пожалуйста. 27,11.

Тьюки, конечно, знал, что сосчитать это в уме не так-то просто.

— Однако! Как это ты?

— Ты что, Фейнмана не знаешь? — сказал кто-то еще. — Он просто морочит нам голову.

Кто-то пошел за таблицей, а пока они ходили, я выдал еще несколько цифр: 27,1126.

— Все правильно!.. Слушай, как это ты так?

— Всего-навсего просуммировал ряд.

— Не морочь голову. Нельзя так быстро просуммировать, ты, небось, знал заранее. Ну хорошо, сколько будет e^3?

— Слушайте, ребята, хорошенького понемножку.

— Ага! Мы так и знали! — обрадовались они.

— Ну так уж и быть. Это будет 20,085.

Они полезли в книгу, а я тем временем выдал еще несколько цифр. Ребята слегка обалдели, потому что опять все сошлось.

Вот вам эти нынешние математики — удивляются, как это я возвожу e в степень! Один из них, наконец, говорит:

— Быть такого не может. Это какой-то фокус. Нельзя так быстро все это просуммировать. Он наверняка не сможет возвести в произвольную степень. Например, $e^{1,4}$.

— Ну сколько можно! Ладно, специально для вас... 4,05.

Пока они возились с таблицей, я еще уточнил число, заявил: «На сегодня все!» — и удалился с гордым видом.

Дело было вот в чем. Я помнил всего три числа: во-первых, натуральный логарифм 10 (он нужен для перевода десятичных логарифмов в натуральные), который равен 2,3026 (поэтому $e^{2,3}$ очень близко к 10). Во-вторых, я много возился с периодами полураспада и знал, что $\ln 2\approx 0{,}69315$ (значит, $e^{0,7}\approx 2$). Кроме того, я знал само число e: $e^1\approx 2{,}71828$.

Первое число, которое они мне задали, было $e^{3,3}=e^{2,3}\cdot e^1\approx 10\cdot e\approx 27{,}18$. Я внес поправку на лиш-

*) Джон У. Тьюки — известный американский математик, автор блестящих работ по топологии и теории вероятностей. (Здесь и далее примечания переводчиков.)

ние 0,0026 и выдал им 27,11.

С числом 3,3 мне сильно повезло. Следующим было $e^{3}=e^{2,3}\cdot e^{0,7}\approx 10\cdot 2$, т. е. 20 с хвостиком. Пока они удивлялись, я учел отличие 0,7 от 0,693. Я понимал, что третий раз уж точно не пройдет: во второй мне опять повезло. Но они попросили $e^{1,4}=e^{0,7}\cdot e^{0,7}$, т. е. 4 с десятыми!

Вот и все. Ребята, впрочем, так ничего и не поняли.

Ханс Бете*), с которым я работал в Лос-Аламосе, не имел равных в устном счете. Как-то раз мы подставляли числа в длинную формулу и наткнулись на 48^2. Я потянулся за арифмометром, а Бете сказал: «Это 2300». Я начал нажимать кнопки, а он добавил: «Если точно, то 2304». На индикаторе появилось 2304.

— Ух ты! Здорово! — удивился я.

— Ты разве не знаешь, как возводить в квадрат числа, близкие к 50? Возводишь в квадрат 50 — это 2500 — и вычитаешь разность твоего числа и 50, умноженную на 100. Получаешь 2300. Если нужно совсем точно, прибавляешь квадрат разности. Итого 2304.

Через несколько минут нам понадобился кубический корень из 2,5. Для вычисления корней на арифмометре надо сначала найти в таблицах первое приближение. Не успел я достать таблицы из стола, как услышал: «Это примерно 1,35».

Арифмометр подтвердил, что Бете опять прав.

— Как вам это удается? Что, есть какой-то быстрый способ вычислять кубические корни?

— Ну, логарифм 2,5 такой-то. Одна треть его лежит между логарифмом 1,3 (столько-то) и 1,4 (столько-то), и я его оценил.

Значит, он, во-первых, помнит таблицу логарифмов, а во-вторых, считает в уме гораздо быстрее меня. Я был ошарашен.

Я решил сам научиться этому, выучил кучу логарифмов и начал подмечать многие вещи. Например, потребовалось 28^2. Тут же соображаешь, что $\sqrt{2}\approx 1,4$, а $28=20\cdot 1,4$, так что $28^2\approx 400\cdot 2=800$.

Если просят поделить 1 на 1,73, то можно сразу сказать, что это 0,577, поскольку $1,73\approx\sqrt{3}$, так что $1/1,73\approx\sqrt{3}/3\approx 1,73/3$. И так далее. (...)

Я получал массу удовольствия, соревнуясь с Хансом в устном счете. Изредка мне удавалось выиграть, подметив какое-нибудь тонкое свойство. Бете тоже очень радовался этим находкам. Сам он мог решить практически любую задачу с точностью до 1 %. Любое число оказывалось близким к чему-нибудь, что он знал.

Как-то у меня было хорошее настроение, и, сам не знаю отчего, я вдруг объявил: «Берусь за 60 секунд решить с точностью 10 %, любую задачу, которую вы сможете сформулировать за 10 секунд».

Был обеденный перерыв. Все наперебой начали придумывать сложные, как им казалось, задачи. Например, найти определенный интеграл от функции вроде $1/(1+x^4)$ (она, как оказалось, почти не менялась в предложенных пределах). Самое сложное, что они придумали, было найти коэффициент при x^{10} в $(1+x)^{20}$. Я таки уложился в минуту.

Все шло как нельзя лучше, когда в холл вошел Пол Улам, мой старый знакомый еще по Принстону, который всякий раз оказывался умнее меня. Например, как-то раз я рассеянно играл с измерительной рулеткой — из тех, что сами сворачиваются в коробочку, когда нажимаешь кнопку. При этом конец ленты всякий раз довольно больно бил по пальцу.

— Слушай, Пол,— сказал я.— Ты когда-нибудь видел другого такого дурака — десятый раз нажимаю на кнопку и каждый раз получаю по пальцу.

— Ты неправильно ее держишь,— ответил он, взял рулетку, вытянул ленту, нажал на кнопку, и она чудеснейшим образом спряталась.

— Как ты это делаешь?

— Догадайся!

Следующие две недели я бродил по Принстону с этой рулеткой, пока моя рука окончательно не распухла. В конце концов я пришел к Полу:

— Все! Я сдаюсь. Как, черт возьми, держать ее, чтобы она не била по пальцу?

— Понятия не имею. Мне она тоже дала по пальцу.

Я почувствовал себя полным идиотом. Из-за него я две недели совершенно добровольно калечил себе руку!

Так вот, он вошел в холл, и все закричали:

— Привет, Пол! Во Фейнман дает! Мы придумываем ему задачи, а он их все решает за минуту с точностью 10 %. Попробуй сам!

Почти не задумываясь, он говорит:

— Тангенс от 10^{100}.

Безнадежно: надо делить на π со ста значащими цифрами! Я сдался. (...)

*) Ханс А. Бете — выдающийся физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии (за предсказание цикла термоядерных реакций, являющихся источником энергии звезд).

В мой первый приезд в Бразилию обедал я как-то в ресторане. Время было не обеденное (почему-то я всегда попадаю в ресторан не тогда, когда полагается), и я был единственным клиентом на четырех официантов.

Поедая свой любимый бифштекс с рисом, я увидел, как в ресторан вошел японец. Я встречал его и раньше — он торговал счетами. И вот я слышу его разговор с официантами:

— Спорим, что я сложу два числа быстрее всех вас?

Официанты, не желая ударить в грязь лицом, сказали:

— Вон сидит клиент, почему бы тебе не посоревноваться с ним?

— Но я не знаю португальского! — возмутился я.

— Ничего, числа — это просто! — засмеялись они.

Принесли бумагу и карандаш. Японец попросил официантов назвать слагаемые. Конечно, он выиграл: пока я записывал числа, он сразу получал ответ. Я предложил, чтобы нам написали два одинаковых списка слагаемых и дали одновременно. Результат мало изменился — он все равно считал быстрее.

Мой соперник слегка завелся и захотел упрочить свою победу. «Multiplicacão!» — сказал он. Кто-то написал нам задачу на умножение. Он снова выиграл, но уже не с таким отрывом. И тут он совершил ошибку — предложил заняться делением. Он не предполагал, что чем труднее задача, тем лучше мои шансы.

Мы решили длинную задачу на деление. Ничья.

Это его взбесило. Он, очевидно, виртуозно владел счетами, а тут какой-то случайный посетитель чуть не выиграл!

— Raios cubicos! — провозгласил он. Кубические корни! Он хочет извлекать на счетах кубические корни! Трудно придумать более сложную задачу для арифметических методов. Это, наверное, был его коронный номер.

Я до сих пор помню это число — 1729,03. Он начал считать со страшной скоростью, бормоча себе под нос. От него прямо-таки шел пар.

Тем временем я просто сидел.

— Что вы сидите? — спросил один из официантов.

— Думаю! — ответил я с достоинством. Затем взял ручку и написал: 12. Немного погодя я получил 12,002.

— Двенадцать! — сказал соперник, вытирая пот со лба.

— Нет уж! — сказал я.— Следующие цифры, пожалуйста!

Я знал, что с каждой следующей цифрой объем арифметической работы увеличивается.

Он погрузился в работу, а я вычислил еще два знака. В конце концов он получил 12,0.

Официанты были очень рады:

— Обрати внимание: он вычисляет в уме, а тебе нужны счеты. И он получил больше цифр!

Мой соперник ушел, совершенно разбитый и расстроенный. Официанты поздравили друг друга.

Что же, собственно, произошло? Число было 1729,03. Я знал, что в кубическом футе 1728 кубических дюймов*). Значит, ответ должен быть чуть больше 12. Избыток, равный 1,03,— это примерно 1/2000 от всей величины, а из математического анализа я знал, что для таких маленьких изменений относительное изменение кубического корня есть 1/3 относительного изменения его аргумента. Поэтому добавка к 12 с большой точностью равна $(1/3)\cdot(1{,}03/1728)\times$ $\times 12$. Отсюда я извлек довольно много значащих цифр.

Месяц спустя я случайно встретился с моим соперником в холле гостиницы, где я жил. Он узнал меня, подошел и попросил объяснить, как я решил задачу про кубический корень.

Я начал объяснять, что это приближенный метод.

— Пусть надо найти кубический корень из 28. Поскольку $\sqrt[3]{27} = 3$...

— Минуточку,— он взялся за счеты,— ... Да, действительно.

Мне стало ясно — он *не понимает* чисел. Со счетами вы ни о чем не думаете: надо только научиться правильно передвигать костяшки. (...)

Кроме того, сама идея приближенного метода была выше его понимания. А ведь в большинстве случаев вычислить кубический корень точно вообще невозможно. Поэтому мне так и не удалось объяснить ему, как я извлек корень и какое это было большое везение, что он выбрал число 1729,03.

*) Дюйм — дольная единица длины в системе английских мер. 1 дюйм = 1/12 фута (= 0,0254 м).

Олимпиады

Наши читатели хорошо знают о математических олимпиадах в СССР и об успешных выступлениях нашей команды на международной олимпиаде. Значительно меньше они знакомы с олимпиадами, проводящимися в других странах-участницах международного «олимпийского движения». Мы предлагаем вам две заметки о математических олимпиадах ФРГ и Канады. Команда ФРГ на международных математических олимпиадах выступает очень стабильно, занимая в течение многих лет, как правило, 1—3-е места в неофициальном командном зачете. Успехи команды Канады — скромнее: как правило, канадская команда оказывается в середине «турнирной таблицы».

Математические олимпиады ФРГ

Математические олимпиады школьников в ФРГ проводятся с 1970 года. В первом заочном туре олимпиады могут участвовать все желающие: во всех школах вывешиваются плакаты с условиями задач и в течение двух месяцев школьники должны выслать свои решения. Количество участников первого тура в разные годы колебалось от 500 до 3000 человек. На второй тур приглашаются призеры первого тура. На первом и втором турах предлагается по 4 задачи. Победители олимпиады определяются после третьего тура — собеседования.

Ниже мы приводим несколько задач первых двух туров.

1 (1971, I тур). На шахматной доске размером $n\times n$ клеток за один ход разрешается перейти в одну из следующих клеток: 1) соседнюю сверху; 2) соседнюю справа; 3) соседнюю слева внизу. Докажите, что ни из какой клетки нельзя пройти в соседнюю с ней справа клетку, побывав в каждой клетке ровно по одному разу.

2 (1972, I тур). Пусть $f(n)=[n+\sqrt{n}+0{,}5]$, где n — натуральное число. Докажите, что $f(n)$ принимает все натуральные значения, кроме полных квадратов. (Через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.)

3 (1973, I тур). Дано число $a=0,a_1\ldots a_n$, десятичная запись которого содержит n знаков после запятой. Всегда ли найдется такое натуральное число N, что первые n знаков числа $\sqrt{N}$ после запятой совпадают с a?

4 (1974, I тур). Длины сторон шарнирного четырехугольника равны a, b, c и d. Каково необходимое и достаточное условие того, что в одном из своих положений этот четырехугольник является трапецией или параллелограммом?

5 (1975, I тур). Какие четырехугольники с перпендикулярными диагоналями являются одновременно вписанными и описанными?

6 (1975, II тур). а) Отношение среднего арифметического двух натуральных чисел к их среднему геометрическому — натуральное число. Докажите, что оба эти числа равны.

б) Опровергните утверждение задачи а) в случае отношения натуральных чисел к их среднему геометрическому.

7 (1978, I тур). Суммой остатков $r(n)$ натурального числа n назовем сумму остатков от деления n на все натуральные числа от 1 до n. Докажите, что суммы остатков для чисел 2^n-1 и 2^n равны.

8 (1978, I тур). Пусть A_1, B_1 и C_1 — образы точек A, B и C при симметриях относительно точек B, C и A соответственно. Постройте треугольник ABC, если задан треугольник $A_1B_1C_1$.

9 (1978, II тур). Простое число p обладает тем свойством, что любое число, полученное из p перестановкой цифр, является простым. Докажите, что в десятичную запись числа p входит не более трех различных цифр.

10 (1979, II тур). В последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ каждый последующий член получается из предыдущего приписыванием к нему справа (т. е. в конце) цифры, отличной от 9. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел.

11 (1979, II тур). Дана окружность радиуса R. Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных во всевозможные треугольники, вписанные в данную окружность.

12 (1980, II тур). На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

13 (1981, I тур). Докажите, что если число p простое, то 2^p+3^p не является степенью натурального числа.

14 (1981, I тур). Пусть $S=a+a^2+\ldots+a^n$, где $a\in\mathbf{N}$. Докажите, что последняя цифра числа S равна 1 тогда и только тогда, когда последние цифры чисел a и n равны 1.

Публикацию подготовил В. В. Прасолов

Канадские математические олимпиады

Национальные математические олимпиады в Канаде проводятся с осени 1968 года. До этого во всех провинциях этой страны много лет математические соревнования школьников проводились, так что общенациональные олимпиады стали завершением этой работы.

Участники первых четырех олимпиад отбирались из числа победителей провинциальных олимпиад. В дальнейшем этот способ отбора был дополнен. Теперь директорам средних школ разрешено лично выдвигать учеников своих школ, достойных по их мнению участвовать в общенациональном соревновании.

Приведем несколько задач канадских математических олимпиад.

1 (1969). Пусть f — функция со следующими свойствами:

1) $f(n)$ определена для любого натурального n;

2) $f(n)$ — целое число;

3) $f(2)=2$;

4) $f(mn)=f(m)f(n)$ для любых m и n;

5) $f(m)>f(n)$, когда $m>n$.

Докажите, что $f(n)=n$.

2 (1970). Пусть задан многочлен $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с целыми коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$. Известно, что существуют четыре различные целые числа a, b, c и d такие, что $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=5$. Докажите, что ни для какого целого числа k $P(k)\neq 8$.

3 (1971). Каждый из n человек знает ровно одну новость, причем все n новостей различны. Каждый раз, когда A звонит B, A сообщает B все, что он знает, тогда как B ничего A не сообщает. Какое минимальное число звонков необходимо для того, чтобы все узнали все новости?

4 (1972). Докажите, что уравнение $x^3+11^3=y^3$ не имеет решений в натуральных числах.

5 (1973). Пусть для каждого натурального n

$$h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Докажите, что

$$n+h(1)+h(2)+\ldots+h(n-1)=nh(n)$$

при $n=2, 3, 4, \ldots$

6 (1974). Пусть n заданное натуральное число. Составим следующую сумму $T_n=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|$, где $x_i\in R$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $0\leqslant x_i\leqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Обозначим через $S(n)$ максимальное возможное значение T_n. Найдите $S(n)$.

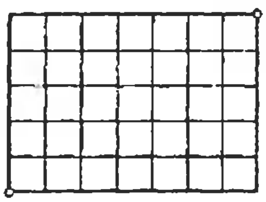
7 (1975). Пусть k — натуральное число. Найдите все многочлены $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ с действительными коэффициентами такие, что $P(P(x))=(P(x))^k$.

8 (1976). Пусть для каждого натурального n $(n\geqslant 1)$

$$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}.$$

Найдите $\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{50}}{a_{51}}$, если $a_0=1$, $a_1=2$.

9 (1977). Прямоугольный город состоит из $m\times n$ кварталов (см. рис.). Женщина живет



в юго-западном углу города, а работает в северо-восточном. Она ходит на работу каждый день; при этом она никогда не проходит дважды через один и тот же перекресток. Докажите, что количество $f(m, n)$ ее возможных различных маршрутов не больше чем 2^{mn}.

10 (1978). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC при продолжении пересекаются в точке E. Пусть H и G соответственно середины диагоналей BD и AC. Найдите отношение площадей треугольника EHG и четырехугольника $ABCD$.

11 (1979). Известно, что сумма углов треугольника на евклидовой плоскости постоянна. Докажите, что сумма двухгранных углов тетраэдра не является постоянной.

12 (1980). Из всех треугольников ABC с данным углом α и данным радиусом вписанной окружности r найдите тот, у которого периметр минимален.

13 (1981). Одиннадцать театральных трупп участвовали в фестивале. Каждый день некоторые труппы давали представления, а остальные были зрителями. В конце фестиваля оказалось, что каждая труппа увидела в свои нерабочие дни представления всех остальных трупп по крайней мере по одному разу. Какое наименьшее число дней мог продолжаться фестиваль?

14 (1982). Пусть P — перестановка множества $S_n=\{1, 2, \ldots, n\}$. Элемент $j\in S_n$ называется неподвижным для P, если $P(j)=j$. Пусть f_n — число перестановок, не имеющих неподвижных элементов, а g_n — число перестановок, имеющих ровно один неподвижный элемент. Докажите, что $|f_n-g_n|=1$.

15 (1983). Площадь треугольника определяется длинами его сторон. Определяется ли объем тетраэдра площадями его граней?

16 (1984). Докажите, что сумма квадратов 1984 последовательных натуральных числа не может быть квадратом целого числа.

17 (1985). Пусть $1<x_1<2$ и при $n=1, 2, 3, \ldots$ последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом: $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$. Докажите, что $|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}$ при $n\geqslant 3$.

18 (1986). На стороне AD треугольника ABD взята точка C так, что $CD=AB=1$, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle CBD=30^\circ$. Найдите AC.

19 (1987). Найдите все решения в натуральных числах уравнения $a^2+b^2=n!$, где a, b, $n\in N$, причем $a\leqslant b$ и $n<14$.

Публикацию подготовил Г. А. Тонян

Ответы, указания, решения

[redacted]ы о полуинварианте

1. Соедините красные точки с синими N отрезками произвольным образом и к двум пересекающимся отрезкам примените операцию, описанную в статье в задаче 3 так, чтобы два новых отрезка также соединяли красные и синие точки.

2. Раскрасьте точки в четыре цвета произвольным образом. Если отрезков с одноцветными концами больше N, то из какой-то точки выходит не менее трех таких отрезков. Эту точку можно перекрасить так, чтобы количество отрезков с одноцветными концами уменьшилось.

3. В качестве полуинварианта рассмотрите количество отрезков с концами одного цвета.

4. Не могут. В качестве полуинварианта рассмотрите разность между наибольшим и наименьшим из чисел.

5. В качестве полуинварианта рассмотрите сумму всех чисел на окружности.

6. 1/512. В качестве полуинварианта рассмотрите величину $m/2^n$, где через m обозначено наименьшее положительное число среди написанных на доске, а через n — количество нулей на доске.

7. Заключим всю совокупность черных клеток в большой прямоугольник и введем прямоугольную систему координат с началом в левом нижнем углу этого прямоугольника. Для каждой черной клетки вычислим сумму ее координат. В качестве полуинварианта рассмотрите максимальное из этих чисел.

8. Заметим, что минимальное число конфет у одного человека в процессе игры не уменьшается, а максимальное может увеличиться не более чем на единицу, если оно нечетно, и не может увеличиться, если оно четно. Если исходный максимум был равен M_0, то в любой момент сумма чисел на окружности не превосходит $(M_0+1)n$, где n — число участников игры. Поэтому, начиная с какого-то момента, ведущий перестает добавлять конфеты, а это значит, что, начиная с этого момента, все числа будут четны. Теперь в качестве полуинварианта рассмотрите величину $S=nM+k$, где M — максимальное число конфет у одного игрока, а k — количество игроков с M конфетами.

9. В качестве полуинварианта рассмотрите величину $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — номера комнат, в которых живут пианисты в данный момент. Докажите, что эта величина монотонно возрастает и ограничена сверху (на самом деле каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ может принимать лишь конечное число значений).

10. Назовем в данной расстановке том «правым», если он стоит справа от своего настоящего места, и «левым», если он стоит слева от своего настоящего места. С каждым «левым» томом с номером k свяжем число 2^k, а с каждым «правым» томом с номером k свяжем число 2^{n+1-k}. В качестве полуинварианта рассмотрите сумму всех этих чисел. Другое решение этой задачи может быть основано на использовании в качестве полуинварианта величины $\Sigma\,|a_k-k|$, где a_k — номер места, на котором стоит k-ый том.

[redacted]матические олимпиады ФРГ

1. Пусть x, y и z — число ходов 1-го, 2-го и 3-го вида соответственно. Тогда должны выполняться равенства $x+y+z=n^2-1$, $z=x$ и $z+1=y$. Складывая их, получаем $3z+2=n^2$. Но квадрат целого числа при делении на 3 не может давать остаток 2.

2. Рассмотрим функцию $f(n)=[n+\sqrt{n}+0{,}5]$ и докажем, что $f(k^2+z)=k^2+k+z$ при $-k+1\leqslant z\leqslant k$. Так как $-k+1\leqslant z\leqslant k$, то $-k+0{,}25<z<k+0{,}25$, а значит, $k^2-k+0{,}25<k^2+z<k^2+k+0{,}25$, т. е. $k-0{,}5<\sqrt{k^2+z}<k+0{,}5$.

3. Пусть $z_1=m+\alpha$ и $z_2=m+\alpha+10^{-n}$, где m — целое число. При достаточно большом m число $z_2^2-z_1^2=10^{-n}(2m+2\alpha+10^{-n})$ больше 1, поэтому найдется натуральное число N, заключенное между z_1^2 и z_2^2. Ясно, что $m+\alpha<\sqrt{N}<m+\alpha+10^{-n}$.

4. Одно из положений — параллелограмм, если $a-c=b-d=0$; трапеция с $b\parallel d$, если $|b-d|>|a-c|$; трапеция с $a\parallel c$, если $|b-d|<|a-c|$.

5. Пусть a, b, c, d — длины последовательных сторон четырехугольника. Так как диагонали перпендикулярны, то $a^2+c^2=b^2+d^2$, а так как четырехугольник описанный, то $a+c=b+d$. Если $a=b$, то $c=d$, а если $a\neq b$, то $a+b=c+d$ и $a+c=b+d$, т. е. $a=d$ и $b=c$. Учитывая, что четырехугольник вписан в окружность, получаем, что одна из диагоналей — диаметр этой окружности.

6. а) Пусть $a=(x_1+x_2)/2$ и $b=\sqrt{x_1x_2}$. Так как $a=nb$, то число b рациональное, а значит, оно натуральное. Числа x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению $x^2-2ax+b=0$, поэтому они равны $a\pm\sqrt{D}$, где $D=4a^2-4b^2=4b^2(n^2-1)$. Число D является полным квадратом, только если $n=1$, т. е. $D=0$ и $x_1=x_2$.

б) Пусть $x_1=(2n-1)^{2n}$, $x_2=\ldots=x_{2n}=1$. Отношение среднего арифметического этих чисел к их среднему геометрическому равно $(1+(2n-1)^{2n-1})/2n$. Это число целое, так как для любых целых чисел a и b справедливо равенство

$$a^{2n-1}+b^{2n-1}=(a+b)(a^{2n-2}-a^{2n-3}b+ +a^{2n-4}b^2-\ldots+b^{2n-2}).$$

7. Так как $2^n-1=2^k(2^{n-k}-1)+2^k-1$, то число 2^n-1 при делении на 2^k, где $k<n$, дает остаток 2^k-1. А остаток от деления 2^n на любое другое число на 1 больше остатка от деления 2^n-1 на это число. Натуральных чисел, меньших 2^n и не делителей 2^n, ровно 2^n-1-n. Поэтому

$$r(2^n)-r(2^n-1)=2^n-1-n-\sum_{i=0}^{n-1}(2^i-1)=2^n- -1-n-(2^n-1)+n=0.$$

8. Пусть прямая AA_1 пересекает C_1B_1 в точке P, а прямая, проходящая через точку C параллельно AA_1, пересекает C_1B_1 в точке Q. Так как $C_1P:PQ=C_1A:AC$ и $PQ:QB_1=BC:CB_1$, то $C_1P=PQ=QB_1$, т. е. $C_1P:C_1B_1=1:3$.

9. В десятичной записи числа p могут встретиться лишь цифры 1, 3, 7 и 9; предположим, что все они встречаются. Рассмотрим числа $a_1=1973$, $a_2=1937$, $a_3=1397$, $a_4=1739$, $a_5=3719$, $a_6=1793$ и $a_7=1379$. Легко проверить, что остаток от деления a_k на 7 равен $7-k$. Данное число p перестановкой цифр можно привести к виду $b\cdot 10^4+a_k$, где k — остаток от деления $b\cdot 10^4$ на 7. Число $b\cdot 10^4+a_k$ делится на 7. Получено противоречие.

Примечание. Можно доказать, что в десятичной записи числа p встречается не более двух различных цифр.

10. Достаточно рассмотреть случай, когда в последовательности перестанут встречаться последние цифры, отличные от 1, 3 и 7. Если не перестанут встречаться цифры 1 и 7, то так как 7 при делении на 3 дает остаток 1, в последовательности будет бесконечно много чисел, делящихся на 3. Предположим теперь, что $a_k=p$ — простое число и $a_{k+n}=p\cdot 10^n+b_n$, где $b_n=33...3$ (n троек). Среди чисел $b_1, ..., b_{p+1}$ найдутся числа b_i и b_j, дающие одинаковые остатки при делении на p. Число $b_i-b_j=33...300...0=b_{i-j}\cdot 10^j$ делится на p, поэтому a_{k+i-j} делится на p.

11. Пусть M — центр данной окружности, O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC с тупым углом C, D — точка пересечения прямой CO с данной окружностью. В треугольнике ADO углы при вершинах A и O равны, поэтому $DO=AD$, а значит, $MO\geqslant DO-R=AD-R>R\sqrt{2}-R$. Искомое ГМТ задается неравенствами $R(\sqrt{2}-1)<MO<R$.

12. Предположим сначала, что описанные окружности треугольника APR и BPQ пересекаются в точке O, лежащей внутри треугольника ABC. Так как $\angle QOR=360^\circ-\angle QOP-\angle POR=\angle A+\angle B=180^\circ-\angle C$, точка O лежит также и на описанной окружности треугольника CQR. Пусть O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR. Так как O_aO_b и O_aO_c — биссектрисы углов PO_aO и RO_aO, то $\angle O_bO_aO_c=\angle PO_aR/2=\angle A$. Случай, когда точка O лежит вне треугольника ABC, рассматривается аналогично.

13. Для $p=2$ утверждение очевидно, поэтому будем считать, что p нечетно. Докажем, что $(-3)^i=2^i+5z_i$. Для $i=0$ это очевидно, а $(-3)^{i+1}=2(-3)^i-5(-3)^i=2^{i+1}+5(2z_i-(-3)^i)$. Поэтому $2^p-(-3)^p=(2-(-3))\times$
$$\times\sum_{i=0}^{p-1}2^{p-i-1}(-3)^i=5\sum_{i=0}^{p-1}2^{p-i-1}\cdot 2^i+25\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{p-1}2^{p-i-1}\cdot z_i=5p2^{p-1}+25z.$$
Число, делящееся на 5, но не делящееся на 25, не может быть степенью натурального числа.

14. Последней цифрой числа a может быть лишь одна из следующих цифр: 1, 3, 7 и 9. Случай, когда последняя цифра числа a равна 1, очевиден. Предположим теперь, что последняя цифра числа a равна 3, 7 или 9. Тогда $a+a^2+a^3+a^4$ оканчивается нулем, а значит, $a^k+a^{k+1}+a^{k+2}+a^{k+3}$ тоже оканчивается нулем. Остается проверить, что числа $a+a^2$ и $a+a^2+a^3$ не могут оканчиваться на 1. Но число $a+a^2$ четно, а $a+a^2+a^3=(1+a+a^2+a^3)-1$.

[redacted]адские математические олимпиады

1. Указание. Ясно, что $f(2^k)=2^k$ при $k=0, 1, 2, ...$ и $f(m+k)\geqslant f(m)+f(k)$. Остается доказать, что не существует n, для которого $f(n)>n$.

2. Из условий задачи следует, что
$$P(x)-5=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x),$$
где $g(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Предположим, что существует $k\in \mathbf{Z}$ такое, что $P(k)=8$. Тогда $(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)g(k)=3$. Отсюда следует, что среди чисел a, b, c, d есть два равных, что противоречит условию задачи.

3. $2n-2$.

4. Указание. Перепишите данное уравнение в виде $(y-x)(y^2+xy+x^2)=11^3$.

5. Заметим, что $n+h(1)+h(2)+...+h(n-1)=$
$$=n+(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot\frac{1}{2}+(n-3)\cdot\frac{1}{3}+...$$
$$...+2\cdot\frac{1}{n-2}+1\cdot\frac{1}{n-1}=n+n\left(1+\frac{1}{2}+...\right.$$
$$\left....+\frac{1}{n-1}\right)-(n-1)\cdot 1=nh(n).$$

6. Ответ. $S(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}, & \text{если } n \text{ четное число,}\\ \dfrac{n^2-1}{4}, & \text{если } n \text{ нечетное число.}\end{cases}$

7. Предположим, что $P(x)$ многочлен степени n. Тогда $P(P(x))$ — многочлен степени n^2. Из условий задачи следует, что $n^2=nk$. Тогда $n=0$ или $n=k$. Ответ: $P(x)=c$ ($c\in \mathbf{R}$) при $k=1$; $P(x)\equiv 0$ при любом $k\in \mathbf{N}$; $P(x)=x^k$ при ($k\geqslant 1$).

8. Ответ. 2655/2. Указание. Докажите по индукции, что $a_n=\dfrac{1}{n!}$ ($n\geqslant 0$).

10. Ответ. 1/4.

12. Ответ. Равнобедренный треугольник ABC, где $AB=AC$.

13. Ответ. 6.

14. Указание. Докажите, что $f_n=(n-1)(f_{n-1}+f_{n-2})$, а $g_n=nf_{n-1}$.

15. Ответ. Нет.

16. Пусть n — натуральное число. Тогда
$$S(n,\ 1984)=\sum_{k=1}^{1984}(n+k)^2=1984n^2+2n\sum_{k=1}^{1984}k+$$
$$+\sum_{k=1}^{1984}k^2=992\cdot\frac{2l+1}{3},$$
где l — некоторое натуральное число. Ясно, что $(2l+1)/3$ — нечетное целое число, а $992=2^5\cdot 31$. Следовательно, $S(n, 1984)=2^5p$, где p — нечетное число. Поэто-

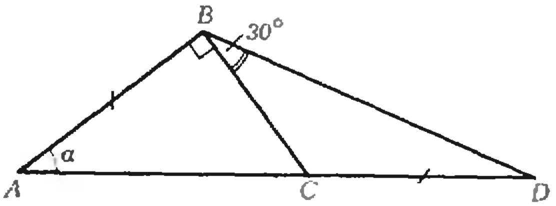


Рис. 1

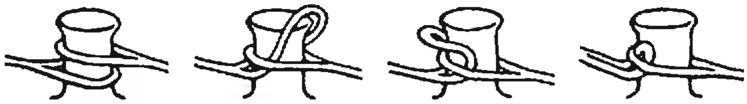


Рис. 2

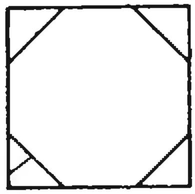


Рис. 3.

му $S(n, 1984)$ ни при каком $n \in N$ не может быть квадратом некоторого целого числа.

17. Легко видеть, что $1 < x_2 < \frac{3}{2}$ и $\frac{11}{8} < x_3 < \frac{3}{2}$. Отсюда получим, что $|x_3 - \sqrt{2}| < 2^{-3}$. Применим метод математической индукции, т. е. предположим, что $|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$ при некотором $n \geqslant 3$. Теперь докажем, что $|x_{n+1} - \sqrt{2}| < 2^{-(n+1)}$. Действительно

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| \cdot |2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - x_n| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-(n+1)} \quad (n \geqslant 3).$$

18. Ответ: $AC = \sqrt[3]{2}$. Пусть $x = AC$, $y = BD$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 1). Тогда из треугольников ABC и BCD (по теореме синусов) получим $y = \frac{2}{x}$. Применяя теорему косинусов к треугольнику ABD, получим $(1+x)^2 = 1 + y + y^2$, где $y = \frac{2}{x}$. Следовательно, $(x+2)(x^3-2) = 0$, откуда $x = \sqrt[3]{2}$.

19. Ответ. $a = b = 1$, $n = 2$ и $a = 12$, $b = 24$, $n = 6$.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 6)

Вопросы и задачи

1. Вдвинуть в катушку.
2. Против часовой стрелки.
3. ЭДС индукции будет иметь наименьшее значение, когда рамка оказывается в плоскости, проходящей через провод, наибольшее — когда рамка перпендикулярна к этой плоскости.
4. Нет, так как поток магнитной индукции контура B не пронизывает контур A.
5. Одинаковый. Нет, поскольку количество теплоты пропорционально скорости движения магнита.
6. При движении магнита в трубке возникает ЭДС индукции, которая порождает магнитное поле, препятствующее свободному падению магнита.
7. Наряду с обычным трением тормозят ротор и амперовы силы, действующие на него со стороны магнитного поля статора.
8. У самолета, летящего вблизи полюса.
9. В двух половинах проволоки возникают равные по величине, но противоположные по знаку ЭДС индукции, которые взаимно компенсируются.
10. В точке B, так как на участке BCA, где отсутствуют источники ЭДС, ток идет от B к A.
11. При переменном токе в монете возникают вихревые токи, при постоянном — нет.
12. Увеличится.
13. Поскольку сопротивление кольца равно нулю, то и суммарная ЭДС в нем всегда должна быть равна нулю. Это может быть только в том случае, если изменение полного магнитного потока через кольцо равно нулю. Следовательно, при удалении магнита созданный индукционным током магнитный поток сохранится равным Ф.

Микроопыт

Переменное магнитное поле вращающегося магнита возбуждает в диске индукционные вихревые токи, направленные так, что создаваемое ими магнитное поле тормозит движение магнита. По третьему закону Ньютона равная и противоположно направленная сила действует на диск и увлекает его вслед за магнитом.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

1. $101 - 10^2 = 1$.

2. Судно «Альфа» сможет и отплыть раньше (см. рис. 2).

3. Зульфие 17 лет. Чтобы произведение оканчивалось на 9, сомножители должны оканчиваться на 3 или на 7. Перебором получаем $17 \cdot 117 = 1989$.

4. Пусть в каждой делегации по n человек, и пусть k делегатов «Зеленого фронта» хотят голосовать за первое название. Тогда за второе название хотят голосовать k делегатов «Эко» и $n-k$ делегатов «Зеленого фронта». Если за второе название голосуют еще m $(m<n)$ делегатов «Искателей истины» и все делегаты «Красного патруля», то общее число голосующих за второе название равно $2n+m$; но по условию $m = \frac{1}{3}(2n+m)$, откуда $m = n$, что противоречит тому, что $m < n$. Следовательно, все делегаты «Красного патруля» голосуют за первое название. Таким образом, за первое название голосуют $3n - m$ делегатов, а за второе название голосуют $n+m$ делегатов. Поскольку $3n - m > n$, а $n + m < 2m$, получаем, что большинство — за первое название.

5. Первый ответ, который приходит в голову: нельзя. Ведь затерялось пять кусков, а остался только один! Но правильный ответ противоположен: восстановить исходный квадрат можно! Ввиду того, что потерявшиеся куски бумаги выпуклы, ни один из них не мог примыкать к восьмиугольнику по двум его разным сторонам. Значит, затерявшихся кусков должно быть не меньше числа тех сторон восьмиугольника, которые не проходили по границе листа бумаги. Значит, не меньше трех сторон восьмиугольника лежат на границе листа. Но так как лист квадратный, эти три стороны *попарно параллельны* или перпендикулярны. Значит, это — три стороны восьмиугольника, взятые подряд через одну. Теперь мы видим, что наш квадрат получается из восьмиугольника приставлением четырех уголков (и, в частности, *на границе листа лежат* целых 4 стороны восьмиугольника). Но ведь потерялось пять кусков!? Значит, один из уголков был еще как-то разрезан на две части (см. рис. 3).

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. 5 кубиков.
2. 2178 · 4=8712.
3. 819896.
4. 180°. Равные углы обозначены на рисунке 4 одинаковыми цветами. Три угла около общей точки окружностей вместе составляют 180°.

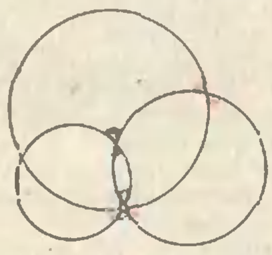


Рис. 4.

5. Можно. Две гирьки, сумма масс которых равна 31 г, назовем парой. Наш набор распадается на 15 пар. Поскольку убрали *только 10 гирек*, не менее 5 пар остались нетронутыми. Возьмем 5 нетронутых пар и положим их на одну чашку весов, а остальные оставшиеся гирьки положим на другую — весы покажут равновесие.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман,
С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев,
А. А. Леонович, С. П. Новиков, Т. С. Петрова,
М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
В. А. Тихомирова
Номер оформили:
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина,
П. И. Чернуский, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Л. С. Сомова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

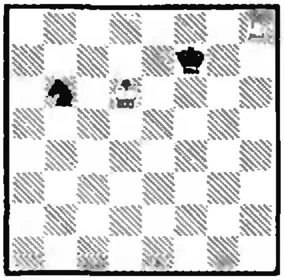
Сдано в набор 26.04.89 Подписано к печати 16.06.89.
Т-11202. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09 Уч.-изд. л. 8,1. Тираж 183 338 экз. Заказ 913.
Цена 45 коп.

Ордена *Трудового Красного* Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ЛАДЬЯ ПРОТИВ КОНЯ

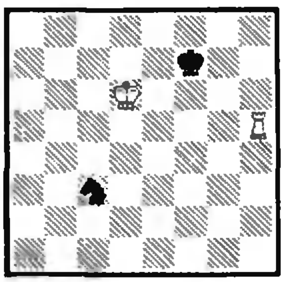
Данное соотношение сил является теоретически ничейным, но достаточно коню немного оторваться от своего короля и его судьба повиснет на волоске. Интересно, что в данном виде окончаний больших успехов добился компьютер. В частности (см. «Квант», 1987, № 3), машина нашла рекордную позицию, в которой ладья при наилучшей игре обеих сторон забирает коня на 27-м ходу: белые: **Кре1, Лf8**; черные: **Кра3, Ке2**. Рассмотрим один интересный этюд.



А. Копнин, 1987 г.
Выигрыш

Главный вариант решения: **1. Лh4 Кс8+ 2. Крd7 Кb6+ 3. Крс6 Кс8 4. Лh7+ Крf6! 5. Лh6+ Крg7 6. Ле6 Крf8! 7. Крd7 Крf7 8. Лh6!** Автор этюда сопровождает его рядом дополнительных вариантов, вот самый длинный из них: 6...Ка7+ 7. Крd6! Крf8 8. Крd7 Кb5 9. Лс3 Кd4 10. Лd3 Кс2 11. Крd6 Крf7 12. Лf3+ Крg6 13. Крс5 Ке1 14. Лс3 Кс2 15. Ле2.

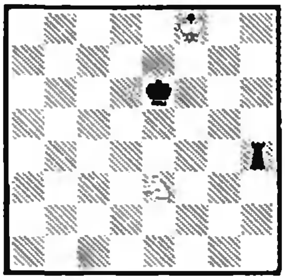
А теперь взглянем на следующую позицию.



Выигрыш

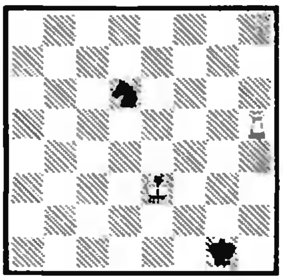
Компьютер, исследовавший ее, указал также первые ходы: **1. Кре5 Ка4 2. Лh7+ Кре8 3. Крd6 Кb6 4. Лh8+ Крf7.** Дальше можно не продолжать, так как перед нами только что рассмотренный этюд Копнина. Таким образом, можно считать, что машина составила более сложный этюд, чем известный композитор!

Итак, если в борьбе ладьи против коня выигрыш есть, то машина всегда найдет его. Однако и человек в состоянии разобраться в таком эндшпиле. Рассмотрим три интересных примера из гроссмейстерской практики.



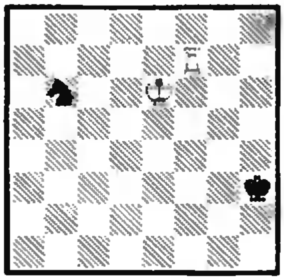
Нейман — Стейниц
(Баден-Баден, 1870 г.)

Первый шахматный король четко проводит финал партии. **1... Ле4! 2. Кd1.** Или 2. Кg2 Крf5 3. Крf7 Крg4 4. Крf6 Ле2; 2. Кс2 Крd5 3. Ка3 Крс5 4. Крf7 Крb4 5. Кb1 Ле2, и все кончено. **2... Лf4+ 3. Крg7.** После 3. Кре8 Лf3! белые в цугцванге — 4. Кb2 Лb3. **3...Лf3 4. Крg6.** Не спасти коня и в случае 4. Кb2 Крd5 5. Крg6 (5. Ка4 Лb3) 5...Крd4 6. Крg5 Лf1 7. Крg4 Лb1 8. Ка4 Лb4. **4... Кре5 5. Крg5 Крd4 6. Крg4 Лf1 7. Кb2 Лb1 8. Ка4 Лb4** и конь погиб.



Боголюбов — Рубинштейн
(Сан-Ремо, 1930 г.)

1...Кс4+. Нетрудно убедиться, что не спасает и 1... Крg2. **2. Крd3 Кb2+.** Коню не удается соединиться со своим королем, не помогает и 2...Кd6 — 3. Лd5 Ке8 4. Крd4 Кf6 5. Лf5 Ке8 6. Крс5. **3. Кре2 Кс4.** На 3...Крg2 решает 4. Лh4!, а вот еще один вариант: 3...Ка4 4. Лg5+ Крh2 5. Крf2 Крh3 6. Крf3 Крh2 7. Лg2+ Крh3 8. Лс2 Кb6 9. Лс6. **4. Лс5 Кd6 5. Крf3 Крh2 6. Лd5 Кс4 7. Крf2 Крh3 8. Лd3+ Крh2 9. Лd4.** Черные сдались.



Карпов — Фтачник
(Салоники, 1988 г.)

Это была самая последняя партия Шахматной Олимпиады. Хотя наша команда и так обеспечила победу в Олимпиаде, экс-чемпиону мира важно было выиграть, чтобы завоевать первое место на своей доске. Почти до конца чехословацкий гроссмейстер защищался точно, но как только на доске возник эндшпиль «ладья против коня», он допустил решающую ошибку.

83...Кс4? Правильно было 83...Ка4! и кружным путем по маршруту b2-d1-f2 (e3) или c5-d3 конь воссоединялся со своим королем. **84. Лf3+! Крg4.** *Теперь, как в настоящем этюде, возникают два эхо-варианта.* Один — в партии, в во втором основная идея реализовывалась в форме связки: 84...Крg2 85. Лс3! Кd2 (85...Кb6 86. Лb3 Ка4 87. Крd5) 86. Лс2.

85. Лd3! Крg5. Не лучше и 85...Кb2 86. Лd2! Кс4 87. Лd4, или 85...Кb6 86. Лb3. **86. Крd5 Кb6+.** Другая ловушка для коня: 86...Кb2 87. Лd2 Ка4 88. Лс2 Кb6 89. Крd6 Крf5 90. Лс5+ Крf6 91. Лс6 Ка4 92. Крd5 Крf5 93. Крd4 Кb2 94. Лс1 Кре6 95. Лb1 Ка4 96. Лb4.

87. Кре5 Кс4+ 88. Кре4! Кb6 89. Лd8! Кс4 90. Лd4 Кb6 91. Кре5 Кс8 92. Кре6 Ка7 93. Крd7. Черные сдались.

Е. Я. Гик

45 к.
Индекс 70465

Мы продолжаем начатый в прошлом номере рассказ об оригами — искусстве складывания фигурок из бумажного квадрата без ножниц и клея. Классические правила оригами исключают также применение циркуля, линейки и тому подобных вещей. Поэтому даже простейшее геометрическое построение может превратиться в любопытную и нестандартную задачу. С такой задачи начинается складывание правильного тетраэдра: надо наметить на листе бумаги сгибы, образующие сеть правильных треугольников (рис. 1; синий пунктир на рисунке — это сгибы-«ущелья», красный — сгибы-«хребты», дужками отмечены углы в 30°). Подумайте, как это сделать, используя только один «инструмент» — сам лист бумаги; решение — в следующем номере. Порядок складывания по подготовленным сгибам показан на рисунках 2—7. Цветом на каждом рисунке выделены линии, по которым сгибается листок на данном шаге. В итоге точки A_1 и A_2 совмещаются с A, а B_1 и B_2 — с B, так что получается тетраэдр $ABCD$. Кромка AB_1 должна упрятаться в карман, образуемый при сгибании полоски вверху квадрата по линии A_1B (рис. 3, 4), а AB_2 прячется в карман по линии A_2B (рис. 4—6).

Д. К.